

BIG BOOK

MATEMATIKA

**SMA
KELAS
1, 2, & 3**

**METODE TERBAIK
MERAH NILAI UJIAN
9 ATAU BAHKAN 10**

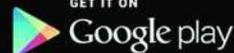
- Kumpulan Lengkap Ringkasan Materi
- Kumpulan Lengkap Rumus Praktis
- Soal & Pembahasan Terupdate
- Latihan & Evaluasi

**1.572
SOAL**

FREE ANDROID APPS

- Apps TOEFL CMEDIA
- Apps TRYOUT SBMPTN

GET IT ON



FREE TRY OUT ONLINE

www.rajatryout.com

BONUS BEASISWA 100 JUTA

**BIG
BOOK**

MATEMATIKA

TIM BBM

media

BIG BOOK

MATEMATIKA

SMA
KELAS
1, 2, & 3

BIG BOOK

MATEMATIKA SMA KELAS 1, 2, & 3

Penyusun: Tim BBM

Penyunting: Eka

Proofreader: Amin

Layout: Nonos

Ilustrasi: Nunu

Pendesain sampul: Jimmy

Diterbitkan pertama kali oleh: Penerbit Cmedia
Imprint Kawan Pustaka

Redaksi:

Jl. H. Montong No. 57, Ciganjur, Jagakarsa
Jakarta Selatan 12630

Telp. (021) 78883030 Ext. 213, 214, 216

Faks. (021) 7270996

E-mail: redaksi@penerbitcmedia.com

Website: www.penerbitcmedia.com

Distributor:

PT KAWAHmedia

Jl. M. Kahfi II No. 12A, Srengseng Sawah,
Jagakarsa, Jakarta Selatan 12630

Telp. (021) 78881000 Ext. 120, 121, 122

Faks. (021) 78882000

E-mail: kawahmedia@gmail.com

Cetakan pertama, 2015

Hak cipta dilindungi oleh undang-undang

Katalog Dalam Terbitan (KDT)

Tim BBM; Big Book Matematika SMA Kelas 1, 2, & 3;
Penyunting, Eka . --- Cet. 1. --- Jakarta: Cmedia, 2015
viii + 744 hal, 20 cm

ISBN 978-602-1609-77-4

1. Big Book Matematika SMA

II. Eka

I. Judul.

III. Seri.

370

Jika Anda menemukan kesalahan cetak, cacat produk, atau kesalahan lain dalam buku ini, silakan kontak kami, atau kembalikan kepada kami untuk kami ganti.

PRAKATA

Dengan mengucapkan puji syukur yang sebesar-besarnya kepada Allah SWT, akhirnya penulis dapat mewujudkan ide penulisan buku ini.

Big Book Matematika SMA Kelas 1, 2, & 3 hadir sebagai solusi siswa untuk menghadapi ulangan harian, ujian tengah dan akhir semester, ujian sekolah, ujian nasional, hingga seleksi bersama masuk perguruan tinggi (SBMPTN), serta seleksi mandiri masuk perguruan tinggi negeri, disusun untuk memperkaya bahan kepustakaan ilmu matematika pada tingkat SMA/MA sederajat. Selain itu, buku ini bertujuan untuk mempermudah pengajar dan siswa dalam mempelajari ilmu matematika.

Konsep buku ini disajikan sesederhana mungkin, dilengkapi dengan beberapa rumus praktis, contoh soal dan pembahasan, serta trik penyelesaian soal dengan *solusi smart*.

Semoga buku ini bermanfaat bagi pengembangan ilmu matematika di masa depan.

Penulis

DAFTAR ISI

	Eksponen	1
	Bentuk Akar	23
	Logaritma	43
	Persamaan Garis	69
	Persamaan Kuadrat	89
	Fungsi Kuadrat	117
	Lingkaran	143
	Sistem Persamaan	173

	Pertidaksamaan	197
	Suku Banyak	225
	Komposisi Fungsi	249
	Program Linear	277
	Matriks	303
	Vektor	329
	Transformasi Geometri	359
	Barisan dan Deret	387
	Bangun Ruang	429
	Trigonometri	463
	Limit Fungsi	511
	Turunan Fungsi	547

	Integral	583
	Statistika	623
	Teori Peluang	657
	Logika Matematika	689
	Soal Evaluasi	711
	Kunci Jawaban	725



EKSPONEN

1

A. PENGERTIAN DAN SIFAT EKSPONEN

Bentuk a^n adalah bilangan pangkat (eksponen) dengan $n \in$ bilangan real,

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ faktor}} =$ perkalian a sebanyak n kali

- a disebut **bilangan pokok**
- n disebut **bilangan pangkat**

Sifat umum eksponen:

- $a^p \times a^q = a^{p+q}$
- $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$
- $a^0 = 1$ dan $a \neq 0$
- $\frac{1}{a^p} = a^{-p}$ dan $a \neq 0$
- $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$
- $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$
- $\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$
- $a^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{a}$
- $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$
- $\sqrt[q]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[pq]{a}$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diketahui $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$, dan $c = 1$. Nilai dari $\frac{a^{-2} \cdot b \cdot c^3}{ab^2c^{-1}}$ adalah
- A. 1
B. 4
C. 16
- D. 64
E. 96

Jawaban: B

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{a^{-2} \cdot b \cdot c^3}{ab^2c^{-1}} &= (a)^{-2-1} \cdot (b)^{1-2} \cdot (c)^{3-(-1)} \\ &= (a)^{-3} \cdot (b)^{-1} \cdot (c)^4 \\ &= (2^{-1})^{-3} \cdot (2)^{-1} \cdot (1)^4 \\ &= (2)^3 \cdot (2)^{-1} \cdot (1)^4 \\ &= \frac{2^3}{2} = 4\end{aligned}$$

2. Bentuk sederhana dari $\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}} = \dots$

A. $\frac{x^{10}z^{10}}{12y^3}$
B. $\frac{z^2}{12x^4y^3}$
C. $\frac{x^{10}y^5}{12z^2}$

D. $\frac{y^3z^2}{12x^4}$
E. $\frac{x^{10}}{12y^3z^2}$

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}} &= \left(\frac{7}{84}\right) \left(\frac{x^3}{x^{-7}}\right) \left(\frac{y^{-4}}{y^{-1}}\right) \left(\frac{z^{-6}}{z^{-4}}\right) \\ &= \left(\frac{1}{12}\right) (x^{3-(-7)}) \left(\frac{1}{y^{-1-(-4)}}\right) \left(\frac{1}{z^{-4-(-6)}}\right) \\ &= \frac{x^{10}}{12y^3z^2}\end{aligned}$$

3. Bila $x = 3$ dan $y = 4$, maka nilai dari $\left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{-4}{3}}}{y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2}\right)^{-\frac{3}{4}}$ sama dengan

- A. $4\sqrt{3}$
 B. 6
 C. $\sqrt{54}$
 D. 24
 E. $12\sqrt{3}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \left(\frac{x^{\frac{2}{3}} \cdot y^{\frac{-4}{3}}}{y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2}\right)^{-\frac{3}{4}} &= \left(\frac{x^{\frac{-1}{2}} \cdot y}{y^{\frac{-1}{2}} \cdot x^{\frac{-3}{2}}}\right) \\ &= \left(x^{\frac{-1}{2} + \frac{3}{2}} \cdot y^{1 + \frac{1}{2}}\right) \\ &= x \cdot y^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow untuk $x = 3$ dan $y = 4$

$$x \cdot y^{\frac{3}{2}} = (3) \cdot (2^2)^{\frac{3}{2}} = (3)(8) = 24$$

4. Jika $f(n) = 2^{n+2} 6^{n-4}$ dan $g(n) = 12^{n-1}$, n bilangan asli, maka $\frac{f(n)}{g(n)} = \dots$

- A. $\frac{1}{32}$
 B. $\frac{1}{27}$
 C. $\frac{1}{18}$
 D. $\frac{1}{9}$
 E. $\frac{2}{9}$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{f(n)}{g(n)} &= \frac{2^{n+2} \cdot 6^{n-4}}{12^{n-1}} \\ &= \frac{2^{n+2} \cdot 6^{n-4}}{(2)^{n-1} \cdot (6)^{n-1}} \\ &= (2)^{(n+2)-(n-1)} \cdot (6)^{(n-4)-(n-1)} \\ &= (2)^3 \cdot (6)^{-3} \\ &= \frac{(2)^3}{(2 \cdot 3)^3} = \frac{1}{(3)^3} = \frac{1}{27} \end{aligned}$$

5. Bentuk $\frac{3x^{-1} - y^{-2}}{x^{-2} + 2y^{-1}}$ dapat dituliskan tanpa eksponen negatif menjadi

....

A. $\frac{x(3y - x)}{y(y + 2x^2)}$

D. $\frac{x(3y^2 - x)}{y(y + 2x^2)}$

B. $\frac{x(3y^2 - x)}{y(x + 2x^2)}$

E. $\frac{x(3y^2 - x)}{y(x - 2x^2)}$

C. $\frac{x(3y^2 - x)}{y(y - 2x^2)}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{3x^{-1} - y^{-2}}{x^{-2} + 2y^{-1}} &= \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{2}{y}} \\ &= \frac{\frac{3x \cdot y^2 - x^2}{(xy)^2}}{\frac{y^2 + 2 \cdot x^2 \cdot y}{(xy)^2}} = \frac{x(3y^2 - x)}{y(y + 2x^2)} \end{aligned}$$

6. Jika $8^m = 27$, maka $2^{m+2} + 4^m = \dots$

A. 12

D. 21

B. 15

E. 24

C. 18

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 8^m = 27 \rightarrow 2^{3m} = 3^3 \rightarrow 2^m = 3$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 2^{m+2} + 4^m &= 2^2 \cdot (2^m) + (2^m)^2 \\ &= 4 \cdot (3) + (3)^2 \\ &= 12 + 9 = 21 \end{aligned}$$

7. Jika a dan b adalah bilangan bulat positif yang memenuhi $a^b = 2^{20} - 2^{19}$, maka $a + b$ adalah

- A. 3
- B. 7
- C. 19
- D. 21
- E. 23

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a^b &= 2^{20} - 2^{19} \\ a^b &= 2^{19} \cdot (2 - 1) \\ a^b &= 2^{19} \rightarrow a = 2 \text{ dan } b = 19 \\ \Leftrightarrow \text{Jadi, } (a + b) &= 2 + 19 = 212. \end{aligned}$$

8. Dalam bentuk pangkat rasional $\sqrt[3]{x^3} \sqrt[5]{x^3} \sqrt{x^3} = \dots$

- A. $x^{13/30}$
- B. $x^{31/30}$
- C. $x^{13/10}$
- D. $x^{31/10}$
- E. $x^{39/10}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^3} \sqrt[5]{x^3} \sqrt{x^3} &= \left(x^1 \cdot x^{\frac{3}{5}} \cdot x^{\frac{3}{2}} \right) \\ &= x^{\frac{30+6+3}{30}} = x^{\frac{39}{30}} = x^{\frac{13}{10}} \end{aligned}$$

B. PERSAMAAN EKSPONEN

a. Bentuk Basar

- $a^{f(x)} = 1 \rightarrow f(x) = 0$
- $a^{f(x)} = b^{f(x)} \rightarrow f(x) = 0$
- $a^{f(x)} = a^{g(x)} \rightarrow f(x) = g(x)$

b. Bentuk: $b(x)^{f(x)} = b(x)^{g(x)}$

Kemungkinan penyelesaian adalah:

- $f(x) = g(x)$
- $h(x) = 1$
 $h(x) = -1$, syarat: $(-1)^{f(x)} = (-1)^{g(x)}$
- $h(x) = 0$, syarat: $f(x) > 0$ & $g(x) > 0$

c. Bentuk: $g(x)^{f(x)} = b(x)^{f(x)}$

Kemungkinan penyelesaian adalah:

- $g(x) = h(x)$
- $f(x) = 0$, syarat: $g(x) \neq 0$ & $h(x) \neq 0$

d. Bentuk: $g(x)^{f(x)} = 1$

Kemungkinan penyelesaian adalah:

- $g(x) = 1$
- $f(x) = 0$, syarat $g(x) \neq 0$
- $g(x) = -1$, syarat $f(x)$ genap

e. Persamaan Bentuk Lain

Biasanya menggunakan permisalan sehingga memudahkan penyelesaian

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

9. Tentukan penyelesaian persamaan!

(a) $4^{x^2-9x+20} = 5^{x^2-9x+20}$

(b) $4^{2x+1} \cdot 3^{4x+1} = 432$

(c) $(3x-4)^{x^2-1} = (x+2)^{x^2-1}$

(d) $(x+2)^{x+4} = (x+2)^{x^2+3x+1}$

Pembahasan:

(a) $4^{x^2-9x+20} = 5^{x^2-9x+20}$

- Persamaan tersebut mempunyai penyelesaian jika:
 $x^2 - 9x + 20 = 0$
 $(x-4)(x-5) = 0 \rightarrow x = 4 \text{ dan } x = 5$
- Himpunan penyelesaian = $\{4, 5\}$

(b) $4^{2x+1} \cdot 3^{4x+1} = (4^2 \cdot 3^3)$

$$4^{(2x+1)-2} = 3^{3-(4x+1)}$$

$$4^{(2x-1)} = 3^{(2-4x)}$$

$$4^{(2x-1)} = 3^{-2(2x-1)}$$

- Persamaan tersebut mempunyai penyelesaian jika:
 $2x - 1 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$
- Himpunan penyelesaian = $\{\frac{1}{2}\}$

(c) $(3x-4)^{x^2-1} = (x+2)^{x^2-1}$

Kemungkinan sama jika:

- $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$
- $3x - 4 = x + 2$
 $2x = 6 \rightarrow x = 2$
- Himpunan penyelesaian = $\{-1, 1, 2\}$

(d) $(x+2)^{x+4} = (x+2)^{x^2+3x+1}$

Kemungkinan sama jika:

- $x + 4 = x^2 + 3x + 1$
 $x^2 + 2x - 3 = 0$
 $(x+3)(x-1) = 0 \rightarrow x = 1 \text{ dan } -3$
- $(x+2) = 1 \rightarrow x = -1$
 $(x+2) = 0 \rightarrow x = -2$
(tidak memenuhi)
 $(x+2) = -1 \rightarrow x = -3$
- Himpunan penyelesaian = $\{-3, -1, 1\}$

10. Penyelesaian persamaan $3^{x^2+x-2} = 81^{x+2}$ adalah α dan β , dengan $\alpha > \beta$.

Nilai $\alpha - \beta = \dots$

- A. 0
B. 3
C. 4
D. 5
E. 7

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 3^{x^2+x-2} &= (3^4)^{x+2} \\ x^2 + x - 2 &= 4x + 8 \\ x^2 - 3x - 10 &= 0 \\ (x-5)(x+2) &= 0 \\ \alpha = 5 \text{ dan } \beta &= -2 \\ \Leftrightarrow \alpha - \beta &= 5 - (-2) = 7\end{aligned}$$

11. Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{\sqrt[3]{4^{5-x}}}{8} = \frac{1}{2^{2x+1}}$ adalah

- A. -4
B. -1
C. $-\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{4}$
E. 2

Jawaban: B

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{\sqrt[3]{4^{5-x}}}{8} &= \frac{1}{2^{2x+1}} \\ \frac{(2^2)^{\frac{5-x}{3}}}{2^3} &= 2^{-2x-1} \\ 2^{\frac{10-2x-3}{3}} &= 2^{-2x-1} \\ \frac{10-2x-9}{3} &= -2x-1 \\ 1-2x &= -6x-3 \\ 4x &= -4 \\ x &= -1\end{aligned}$$

12. Bila x_1 dan x_2 penyelesaian dari persamaan $2^{2x} - 6 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$ dengan $x_1 > x_2$, maka nilai dari $2x_1 + x_2 = \dots$

A. $\frac{1}{4}$

D. 8

B. $\frac{1}{2}$

E. 16

C. 4

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 2^{2x} - 6 \cdot 2^{x+1} + 32 = 0$$

$$(2^x)^2 - 12(2^x) + 32 = 0$$

$$(2^x - 8)(2^x - 4) = 0$$

- $2^x = 8 \rightarrow x_1 = 3$
- $2^x = 4 \rightarrow x_2 = 2$

$$\Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = 2(3) + 2 = 8$$

13. Himpunan penyelesaian persamaan $2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1 = 0$ adalah

A. $\left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$

D. $\left\{0, {}^3\log\frac{1}{2}\right\}$

B. $\left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}$

E. $\left\{0, \frac{1}{2}\log 3\right\}$

C. $\left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 9^x - 3^{x+1} + 1 = 0$$

$$2 \cdot (3^x)^2 - 3 \cdot (3^x) + 1 = 0$$

$$(2 \cdot 3^x - 1) \cdot (3^x - 1) = 0$$

- $3^x = \frac{1}{2} \rightarrow x = {}^3\log\frac{1}{2}$
- $3^x = 1 \rightarrow x = 0$

$$\Leftrightarrow \text{Himpunan penyelesaian} = \left\{0, {}^3\log\frac{1}{2}\right\}$$

14. Akar-akar persamaan $2 \cdot 3^{4x} - 20 \cdot 3^{2x} + 18 = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Nilai

$$x_1 + x_2 = \dots$$

- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
 E. 4

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{4x} - 20 \cdot 3^{2x} + 18 = 0 \rightarrow p = 3^{2x}$$

$$2p^2 - 20 \cdot p + 18 = 0 \rightarrow \text{dibagi 2}$$

$$p^2 - 10 \cdot p + 9 = 0$$

$$p_1 \cdot p_2 = \frac{c}{a} \rightarrow 3^{2x_1} \cdot 3^{2x_2} = 9$$

$$3^{2(x_1+x_2)} = 3^2$$

$$2(x_1 + x_2) = 2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

SOLUSI SMART!

- $a \cdot (p^x)^2 + b \cdot (p^x) + c = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = {}^p \log \frac{c}{a}$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot (3^{2x})^2 - 20 \cdot (3^{2x}) + 18 = 0$$

$$2x_1 + 2x_2 = {}^3 \log \frac{9}{1} = 2$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

15. Diketahui $2^{2x} + 2^{-2x} = 23$. Nilai $2^x + 2^{-x} = \dots$

- A. $\sqrt{21}$
 B. $\sqrt{24}$
 C. 5
 D. 21
 E. 25

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \text{misal: } a = 2^x + 2^{-x}$$

- **kuadratkan di kedua ruasnya**

$$a^2 = (2^x + 2^{-x})^2$$

$$a^2 = 2^{2x} + 2 + 2^{-2x}$$

$$a^2 - 2 = 2^{2x} + 2^{-2x}$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x} + 2^{-2x} = 23$$

$$a^2 - 2 = 23 \rightarrow a^2 = 25 \rightarrow a = 5$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } 2^x + 2^{-x} = a = 5$$

16. Bila $\frac{4}{5}(2^{3x-1}) + \frac{8^x}{10} = 2$, maka $x = \dots$

- A. $-\frac{3}{2}$ D. $\frac{2}{3}$
 B. $-\frac{2}{3}$ E. $\frac{3}{2}$
 C. 1

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}(2^{3x-1}) + \frac{8^x}{10} = 2$$

$$\frac{4}{5}\left(\frac{2^{3x}}{2}\right) + \frac{2^{3x}}{10} = \frac{20}{10} \rightarrow \text{dikali } 10$$

$$4 \cdot 2^{3x} + 2^{3x} = 20$$

$$5 \cdot 2^{3x} = 20 \rightarrow \text{dibagi } 5$$

$$2^{3x} = 4 = 2^2$$

$$3x = 2 \rightarrow x = \frac{2}{3}$$

17. Jumlah akar-akar persamaan $5^{x+1} + 5^{2-x} = 30$ adalah

- A. -2 D. 1
 B. -1 E. 2
 C. 0

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 5^{x+1} + 5^{2-x} = 30$$

$$5 \cdot 5^x + \frac{25}{5^x} = 30 \rightarrow \text{dikali } \frac{5^x}{5}$$

$$(5^x)^2 - 6(5^x) + 5 = 0 \rightarrow \text{misal: } p = 5^x$$

$$p^2 - 6p + 5 = 0$$

$$(p-5)(p-1) = 0$$

- $p = 5 \rightarrow 5^x = 5 \rightarrow x_1 = 1$
 - $p = 1 \rightarrow 5^x = 5^0 \rightarrow x_2 = 0$
- $\Leftrightarrow x_1 + x_2 = 1 + 0 = 1$

SOLUSI SMART!

• $a \cdot (p^x)^2 + b \cdot (p^x) + c = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = {}^p \log \frac{c}{a}$

$\Leftrightarrow (5^x)^2 - 6(5^x) + 5 = 0$

$x_1 + x_2 = {}^p \log \frac{c}{a} = {}^5 \log 5 = 1$

C. PERTIDAKSAMAAAN DAN FUNGSI EKSPONEN

a. Pertidaksamaan

Bentuk: $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$

- $a > 1 \rightarrow f(x) \geq g(x)$
- $0 < a < 1 \rightarrow f(x) \leq g(x)$

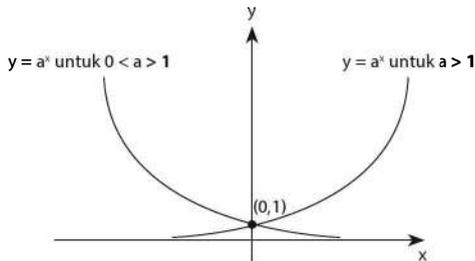
Bentuk: $a^{f(x)} < a^{g(x)}$

- $a > 1 \rightarrow f(x) \leq g(x)$
- $0 < a < 1 \rightarrow f(x) \geq g(x)$

b. Fungsi Eksponen

Bentuk umum fungsi eksponen adalah:

$y = f(x) = a^x, a > 0$ dan $a \neq 1$



Sifat fungsi eksponen:

- Nilai fungsi selalu positif/ definit positif (grafik selalu di atas sumbu x)
- Memotong sumbu Y di (0,1)
- Mempunyai asimtot datar $y = 0$
- Monoton naik untuk $a > 1$, dan monoton turun untuk $0 < a < 1$
- Mempunyai fungsi invers, yaitu fungsi logaritma.

$$f(x) = a^x \rightarrow f^{-1}(x) = {}^a \log x$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

18. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan eksponen

$$9^{2x-4} \geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4} \text{ adalah}$$

- A. $\left\{ x \mid -2 \leq x \leq \frac{10}{3} \right\}$ D. $\left\{ x \mid x \leq -2 \text{ atau } x \geq \frac{10}{3} \right\}$
- B. $\left\{ x \mid -\frac{10}{3} \leq x \leq 2 \right\}$ E. $\left\{ x \mid -\frac{10}{3} \leq x \leq -2 \right\}$
- C. $\left\{ x \mid x \leq -\frac{10}{3} \text{ atau } x \geq 2 \right\}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 9^{2x-4} &\geq \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4} \\ (3)^{2(2x-4)} &\geq (3)^{-3(x^2-4)} \\ 4x - 8^3 &\geq -3x^2 + 12 \\ 3x^2 + 4x - 20 &\geq 0 \\ (3x+10)(x-2)^3 &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \text{Himpunan penyelesaian} \\ &= \left\{ x \mid x \leq -\frac{10}{3} \text{ atau } x \geq 2 \right\} \end{aligned}$$

19. Penyelesaian pertidaksamaan $2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 8 \geq 0$ adalah

- A. $x \leq 0$ atau $x \geq 2$
B. $x \leq 1$ atau $x \geq 4$
C. $x \leq 2$ atau $x \geq 4$
D. $0 \leq x \leq 2$
E. $1 \leq x \leq 4$

Jawaban: B

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^{x+1} + 8 &\geq 0 \\ 2 \cdot 2^{2x} - 5 \cdot (2 \cdot 2^x) + 8 &\geq 0 \rightarrow \text{dibagi } 2 \\ (2^x)^2 - 5(2^x) + 4 &\geq 0 \\ (2^x - 1)(2^x - 4) &\geq 0 \\ 2^x &\leq 1 \text{ atau } 2^x \geq 4 \\ 2^x &\leq 2^0 \text{ atau } 2^x \geq 2^2 \\ x &\leq 1 \text{ atau } x \geq 4\end{aligned}$$

20. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2^{4x} - 2^{2(x+1)} + 3 < 0$ adalah

....

- A. $\{x \mid 1 < x < 3\}$
B. $\{x \mid 0 < x < {}^3\log \sqrt{2}\}$
C. $\{x \mid x < 0 \text{ atau } x > {}^2\log \sqrt{3}\}$
D. $\{x \mid 0 < x < {}^2\log \sqrt{3}\}$
E. $\{x \mid 0 < x < {}^2\log 3\}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow (2^{2x})^2 - 4 \cdot 2^{2x} + 3 &< 0 \\ (2^x - 1)(2^x - 3) &< 0 \\ 1 &< 2^x < 3 \\ 2^0 &< (2^{2x}) < 2^{2\log 3} \\ 0 &< 2x < {}^2\log 3 \\ 0 &< x < \frac{1}{2} \cdot {}^2\log 3 \\ 0 &< x < {}^2\log \sqrt{3}\end{aligned}$$

LATIHAN SOAL 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika p bilangan rasional sehingga $\sqrt[5]{25^p} = 5$, maka $\sqrt[3]{4^p} = \dots$
 - A. $2^{\frac{3}{5}}$
 - B. $2^{\frac{4}{5}}$
 - C. $2^{\frac{5}{3}}$
 - D. $2^{\frac{10}{3}}$
 - E. $2^{\frac{15}{4}}$
2. Diketahui $a = \frac{1}{8}$, $b = 16$ dan $c = 4$, maka nilai $a^{-\frac{11}{3}} \cdot b^{\frac{1}{4}} \cdot c^{-\frac{1}{2}}$ adalah
 - A. $\frac{1}{256}$
 - B. $\frac{1}{4}$
 - C. 1
 - D. 4
 - E. 256
3. Bentuk sederhana dari $\frac{3^{\frac{5}{3}} \cdot 12^{\frac{7}{12}}}{6^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{-\frac{1}{4}}}$ adalah
 - A. $6^{\frac{1}{4}}$
 - B. $6^{\frac{3}{4}}$
 - C. $6^{\frac{3}{2}}$
 - D. $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$
 - E. $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{4}}$

4. Bentuk sederhana dari $\frac{7x^3y^{-4}z^{-6}}{84x^{-7}y^{-1}z^{-4}}$ adalah
- A. $\frac{x^{10}z^{10}}{12y^3}$ D. $\frac{y^3z^2}{12x^4}$
 B. $\frac{z^2}{12x^4y^3}$ E. $\frac{x^{10}}{12y^3z^2}$
 C. $\frac{x^{10}y^5}{12z^3}$
5. Jika $2^x = 3$, $3^y = 4$, dan $4^z = 5$, maka $2^{xyz+1} = \dots$
- A. 0 D. 10
 B. 2 E. 15
 C. 5
6. Jika $9^{m+1} - 2 \cdot 9^m = 14$, maka $27^m = \dots$
- A. $\sqrt{2}$ D. 4
 B. 2 E. 6
 C. $2\sqrt{2}$
7. Jika n bilangan bulat, maka $\frac{2^{n+2} \cdot 6^{n-4}}{12^{n-1}} = \dots$
- A. $\frac{1}{27}$ D. $\frac{1}{8}$
 B. $\frac{1}{16}$ E. $\frac{1}{3}$
 C. $\frac{1}{9}$
8. Jika n memenuhi $\underbrace{25^{0,25} \times 25^{0,25} \times 25^{0,25} \times \dots \times 25^{0,25}}_{n \text{ faktor}} = 12$, maka $(n-3)(n+2) = \dots$
- A. 36 D. 26
 B. 32 E. 24
 C. 28
9. Diketahui $x + x^{-1} = 7$. Nilai $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = \dots$
- A. $\sqrt{5}$ D. 5
 B. 3 E. 9
 C. $\sqrt{11}$

14. Jika $\frac{8^x}{2^y} = 32$ dan $4^x \cdot 2^y = 32^2$, maka $x+y = \dots$
- A. 1
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8
15. x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $(5^x - 2)(5^x - 4) = \log 1$. Jika $x_1 > x_2$, maka $\left(\frac{1}{5}\right)^{3x_2 - 2x_1} = \dots$
- A. $1/8$
B. $1/2$
C. 2
D. 8
E. 5^8
16. Diketahui $f(x) = 2^{5-x} + 2^x - 12$. Jika $f(x_1) = f(x_2) = 0$, maka $x_1 \cdot x_2 = \dots$
- A. 6
B. 5
C. 4
D. -5
E. -6
17. Jika x memenuhi persamaan $9^x + 8(3^{x-1}) = 1$, maka $\frac{9^{x^2}}{3^x} = \dots$
- A. $\frac{1}{27}$
B. $\frac{1}{9}$
C. 9
D. 27
E. 81
18. Penyelesaian persamaan $2(25)^{x+1} + 5^{x+2} - 3 = 0$ adalah
- A. $1 - {}^2\log 5$
B. $-1 - {}^5\log 2$
C. $1 + {}^5\log 2$
D. $-1 - 5\log 2$
E. $1 + 5\log 2$
19. Jika x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $2^{4x-1} - 5 \cdot 2^{2x+1} = -32$, maka $x_1 + x_2 = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$
B. 1
C. 2
D. 3
E. 6

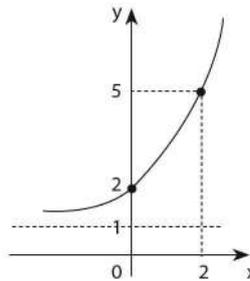
25. Himpunan penyelesaian dari $64^{x^2 - \frac{3}{4}x} \leq (\sqrt{8})^{x^3}$ adalah
- A. $\{x | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x | x \geq 3\}$ D. $\{x | 0 \leq x < 1\} \cup \{x | x \geq 3\}$
 B. $\{x | 0 < x < 1\} \cup \{x | x > 3\}$ E. $\{x | 0 \leq x \leq 1\} \cup \{x | x \geq 3\}$
 C. $\{x | 0 < x \leq 1\} \cup \{x | x \geq 3\}$
26. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $3^{2x} - 4 \cdot 3^{x+1} > -27$ adalah
- A. $1 < x < 2$ D. $x < 1$ atau $x > 3$
 B. $2 < x < 9$ E. $x < 3$ atau $x > 9$
 C. $x < 1$ atau $x > 2$
27. Batasan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $9^{-x+1} + 8 \cdot 3^{-x} - 1 > 0$ adalah
- A. $x < 0$ D. $x > 1$
 B. $x < 1$ E. $x > 2$
 C. $x < 2$
28. Himpunan semua x yang memenuhi pertidaksamaan $5^{2x} - 5^{x+1} - 5^x + 5 > 0$ adalah
- A. $\{x | 0 < x < 1\}$ D. $\{x | x > 1\}$
 B. $\{x | x < 0$ atau $x > 1\}$ E. $\{x | x > 0\}$
 C. $\{x | x < 0\}$
29. Semua nilai x yang memenuhi $\frac{4^x + 3}{2^{x+2}} \leq 1$ adalah
- A. $0 \leq x \leq 1$ D. $1 \leq x \leq {}^2\log 3$
 B. $x \geq 1$ E. $x \geq {}^2\log 3$
 C. $0 \leq x \leq {}^2\log 3$
30. Penyelesaian pertidaksamaan $4^{x-1} - 6 \cdot 2^{x-2} - 10 < 0$ adalah
- A. $x < -1 + {}^2\log 5$ D. $x < 1 - 2 \cdot {}^2\log 5$
 B. $x < 2 + {}^2\log 5$ E. $x < 1 + 2 \cdot {}^2\log 5$
 C. $x < 1 + {}^2\log 5$

31. Panjang sisi miring suatu segitiga siku-siku adalah 2^{x+2} . Jika panjang dua sisi yang lainnya adalah 4 dan 2^{2x+1} , maka nilai x yang memenuhi terletak pada interval

- A. $-1 < x < 0$
- B. $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$
- C. $0 < x < 1$
- D. $\frac{2}{3} < x < 2$
- E. $1 < x < 3$

32. Persamaan grafik fungsi pada gambar berikut adalah

- A. $f(x) = 2^{x+1}$
- B. $f(x) = 2^x + 1$
- C. $f(x) = 2^{x+1} + 1$
- D. $f(x) = {}^2\log(x+1)$
- E. $f(x) = {}^2\log x + 1$



33. Jika $f(x) = 4^x$ dan $g(x) = 4^{-x}$, maka:

- (1) grafik $f(x)$ dan grafik $g(x)$ berpotongan di titik $(0,1)$
- (2) $g(x)$ adalah fungsi invers dari $f(x)$
- (3) grafik $g(x)$ adalah cermin grafik $f(x)$ terhadap sumbu y
- (4) grafik $f(x)$ turun dan grafik $g(x)$ naik

Pernyataan yang benar adalah nomor

- A. (1), (2), dan (3)
- B. (1) dan (3)
- C. (2) dan (4)
- D. (4) saja
- E. (1), (2), (3) dan (4)

34. Kurva $y = 3^{x+1} - \left(\frac{1}{9}\right)^x$ berada di bawah kurva $y = 3^x + 1$ pada saat

- A. $x < 2$
- B. $x > 1$
- C. $x < 1$
- D. $x > 0$
- E. $x < 0$

35. Jarak kedua titik potong kurva $y = 2^{2x+1} - 5 \cdot 2^x + 2$ dengan sumbu x adalah

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

E. 6



BENTUK AKAR

2

A. PENGERTIAN & SIFAT AKAR

Bentuk akar adalah akar dari bilangan rasional yang menghasilkan bilangan irrasional.

Bentuk \sqrt{a} terdefinisi jika, $a \geq 0$

Sifat Dasar Bentuk Akar:

- $a\sqrt{c} + b\sqrt{c} = (a+b)\sqrt{c}$
- $a\sqrt{c} - b\sqrt{c} = (a-b)\sqrt{c}$
- $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

Rumus bantu:

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Bentuk sederhana dari $4\sqrt{200} - 2\sqrt{242} - 5\sqrt{50} + 10\sqrt{2} = \dots$

A. $2\sqrt{2}$	D. $5\sqrt{2}$
B. $3\sqrt{2}$	E. $6\sqrt{2}$
C. $4\sqrt{2}$	

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & 4\sqrt{200} - 2\sqrt{242} - 5\sqrt{50} + 10\sqrt{2} \\ & = 4\sqrt{(100)(2)} - 2\sqrt{(121)(2)} - 5\sqrt{(25)(2)} + 10\sqrt{2} \\ & = 4(10)\sqrt{2} - 2(11)\sqrt{242} - 5(5)\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \\ & = (40 - 22 - 25 + 10) \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Hasil dari $(2\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6}) = \dots$

A. $2(1 - \sqrt{2})$

D. $3(\sqrt{3} - 1)$

B. $2(2 - \sqrt{2})$

E. $4(2\sqrt{3} + 1)$

C. $2(\sqrt{3} - 1)$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & (2\sqrt{2} - \sqrt{6})(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \\ & = 2\sqrt{2}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) - \sqrt{6}(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \\ & = 4 + 2\sqrt{12} - \sqrt{12} - 6 \\ & = \sqrt{12} - 2 \\ & = 2\sqrt{3} - 2 \\ & = 2(\sqrt{3} - 1) \end{aligned}$$

3. Nilai dari $\frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} - \sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} = \dots$

A. $\sqrt{7} - \sqrt{3}$

D. $\sqrt{7} + \sqrt{2}$

B. $\sqrt{5} + \sqrt{3}$

E. $\sqrt{7} - \sqrt{2}$

C. $\sqrt{5} - \sqrt{3}$

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{\sqrt{35} + \sqrt{21} - \sqrt{10} - \sqrt{6}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\ & = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{7} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{5} + \sqrt{3}) - \sqrt{2}(\sqrt{5} + \sqrt{3})}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} \\
&= \frac{(\cancel{\sqrt{5} + \sqrt{3}})(\sqrt{7} - \sqrt{2})}{(\cancel{\sqrt{5} + \sqrt{3}})} \\
&= \sqrt{7} - \sqrt{2}
\end{aligned}$$

4. Jika $a = 2 + \sqrt{7}$ dan $b = 2 - \sqrt{7}$, maka $a^2 + b^2 - 4ab = \dots$

- A. 36
 B. 34
 C. 32
 D. 30
 E. 28

Jawaban: B

$$\bullet \quad (x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$\Leftrightarrow a \cdot b = (2 + \sqrt{7})(2 - \sqrt{7})$$

$$= (2)^2 - (\sqrt{7})^2$$

$$= 4 - 7 = -3$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 4ab = [(a + b)^2 - 2ab] - 4ab$$

$$= (a + b)^2 - 6ab$$

$$= (4)^2 - 6(-3) = 34$$

5. Bentuk sederhana dari $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ adalah

- A. $-4\sqrt{3}$
 B. $4\sqrt{2}$
 C. $4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}$
 D. $4\sqrt{2} - 4\sqrt{3} - 4\sqrt{6}$
 E. 0

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \text{Misal: } a = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$$

$$b = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (1 - \sqrt{2} + \sqrt{3})^2$$

$$\begin{aligned}
 &= a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\
 \Leftrightarrow a+b &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2 \\
 a-b &= (1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) - (1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \\
 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) &= 2(2\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \\
 &= 4\sqrt{2} - 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

6. Nilai dari $\sqrt{4+\sqrt{7}} - \sqrt{4-\sqrt{7}} = \dots$

- A. $\sqrt{3}$ D. 2
 B. $\sqrt{2}$ E. 3
 C. 1

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \text{misal: } x = \underbrace{\sqrt{4+\sqrt{7}}}_a - \underbrace{\sqrt{4-\sqrt{7}}}_b$$

$$x^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 = \left(\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2 = 4 + \sqrt{7}$$

$$b^2 = \left(\sqrt{4-\sqrt{7}}\right)^2 = 4 - \sqrt{7}$$

$$2ab = 2(\sqrt{4+\sqrt{7}})(\sqrt{4-\sqrt{7}})$$

$$= 2\left(\sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2}\right)$$

$$= 2(\sqrt{16-7})$$

$$= 2\sqrt{9} = 6$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (4 + \sqrt{7}) - 6 + (4 - \sqrt{7}) = 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a^2 - 2ab + b^2 = 2 \rightarrow x = \sqrt{2}$$

7. Bilangan $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ sama dengan

- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}}_a + \underbrace{\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}}_b$$

$$\bullet \quad a^3 = \left\{ (2+\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} \right\}^3 = 2+\sqrt{5}$$

$$\bullet \quad b^3 = \left\{ (2-\sqrt{5})^{\frac{1}{3}} \right\}^3 = 2-\sqrt{5}$$

$$\bullet \quad a \cdot b = \sqrt[3]{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$$

$$2 + \sqrt{5} + 2 - \sqrt{5} = (a+b)^3 - 3(-1)(a+b)$$

$$0 = (a+b)^3 + 3(a+b) - 4$$

Nilai $(a+b)$ yang memenuhi persamaan tersebut adalah 1.

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } (a+b) = 1$$

B. MERASIONALKAN BENTUK AKAR

Secara umum untuk merasionalkan penyebut suatu pecahan dapat diperoleh dengan cara **mengalikan bentuk sekawannya**.

Di bawah ini beberapa **contoh merasionalkan** penyebut suatu pecahan dengan cara mengalikan bentuk sekawannya.

$$\bullet \quad \frac{a}{\sqrt{b}} = \frac{a}{\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b}$$

$$\bullet \quad \frac{c}{a-\sqrt{b}} = \frac{c}{a-\sqrt{b}} \cdot \frac{a+\sqrt{b}}{a+\sqrt{b}} = \frac{c(a+\sqrt{b})}{a^2-b}$$

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b}$$

$$\bullet \quad \frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{c}+\sqrt{d}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{c}+\sqrt{d})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b}$$

8. Bentuk sederhana dari $\frac{3}{4\sqrt{6}}$ adalah

A. $\frac{1}{4}\sqrt{6}$

D. $\frac{1}{8}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{5}\sqrt{6}$

E. $\frac{1}{12}\sqrt{6}$

C. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{3}{4\sqrt{6}} &= \frac{3}{4\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{6}} \right) \\ &= \frac{12\sqrt{6}}{96} \\ &= \frac{1}{8}\sqrt{6} \end{aligned}$$

9. Bentuk sederhana dari $\frac{8}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}$ adalah

A. $4(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

D. $2(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

B. $4(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

E. $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

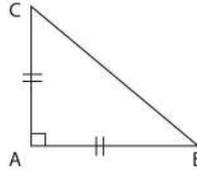
C. $2(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{8}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} &= \frac{8}{(\sqrt{6}-\sqrt{2})} \cdot \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{8(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{6-2} \\ &= 2(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \end{aligned}$$

10. Keliling segitiga ABC pada gambar adalah 8 cm. Panjang sisi AB adalah

- A. $4\sqrt{2}$ cm
- B. $(4 - \sqrt{2})$ cm
- C. $(4 - 2\sqrt{2})$ cm
- D. $(8 - 2\sqrt{2})$ cm
- E. $(8 - 4\sqrt{2})$ cm



Jawaban: E

⇔ Misal: $AB = AC = a$, maka $(BC) = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2 \cdot a^2} = a\sqrt{2}$

⇔ Keliling $\triangle ABC = 18$

$$AB + AC + BC = 18$$

$$2a + a\sqrt{2} = 18$$

$$a(2 + \sqrt{2}) = 18$$

$$a = \frac{18}{2 + \sqrt{2}} = \frac{18}{2 + \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{8(2 - \sqrt{2})}{4 - 2} = 8 - 4\sqrt{2}$$

11. Jika dirasionalkan, maka $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \dots$

- A. $-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- B. $-1 - \sqrt{2}$
- C. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- E. $2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{1 - \sqrt{2}} = \frac{1}{1 - \sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}} \right)$$

$$= -(1 + \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1-\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + (-1-\sqrt{2})$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

12. $\frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^3}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} = \dots$

A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

D. $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$

B. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$

E. $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

C. $2\sqrt{2}-3\sqrt{3}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5(3-2)(3-2\sqrt{6}+2)}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}}$$

$$= \frac{5(5-2\sqrt{6})}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{5\{10\sqrt{2}+5\sqrt{3}-4\sqrt{12}-2\sqrt{18}\}}{8-3}$$

$$= \frac{5\{10\sqrt{2}+5\sqrt{3}-8\sqrt{3}-6\sqrt{2}\}}{5}$$

$$= 4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$$

13. Jika bilangan bulat a dan b memenuhi $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} = a+b\sqrt{30}$, maka

ab =

A. -22

D. 2

B. -11

E. 13

C. -9

Jawaban: A

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} &= \frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}-\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{6}} \right) \\ &= \frac{(\sqrt{5}-\sqrt{6})^2}{5-6} \\ &= \frac{5-2\sqrt{30}+6}{-1} \\ &= -11+2\sqrt{30} \\ &= a+b\sqrt{30}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow a = -11 \text{ dan } b = 2 \rightarrow a \cdot b = -22$$

14. Bentuk sederhana dari $\frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ adalah

A. $a+b-\sqrt{ab}$

D. $a-b-\sqrt{ab}$

B. $a-b+\sqrt{ab}$

E. $-a-b-\sqrt{ab}$

C. $a+b+\sqrt{ab}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{a\sqrt{a}-b\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &\cdot \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right) \\ &= \frac{a\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-b\sqrt{b}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \\ &= \frac{a^2+a\sqrt{ab}-b\sqrt{ab}-b^2}{a-b} \\ &= \frac{a^2-b^2+\sqrt{ab}(a-b)}{a-b} \\ &= \frac{\cancel{(a-b)} \{ (a+b)+\sqrt{ab} \}}{\cancel{(a-b)}} = a+b+\sqrt{ab}\end{aligned}$$

15. Jika $\sqrt{3x+2} + \sqrt{3x-13} = 5$, maka nilai $\sqrt{3x+2} - \sqrt{3x-13} = \dots$
- A. 1
B. 2
C. 3
- D. 5
E. 7

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{3x+2}}_{\sqrt{a}} + \underbrace{\sqrt{3x-13}}_{\sqrt{b}} = 5$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a} + \sqrt{b}) \cdot \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \right) = 5$$

$$\frac{a-b}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 5$$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{5}$$

$$= \frac{(3x+2) - (3x-13)}{5}$$

$$= \frac{15}{5} = 3$$

C. BENTUK AKAR LAINNYA

Di bawah ini beberapa **rumus bentuk akar** lainnya.

- $\sqrt{(a+b) + 2\sqrt{(a)(b)}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$
- $\sqrt{(a+b) - 2\sqrt{(a)(b)}} = \sqrt{a} - \sqrt{b}, (a > b)$
- $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\cdots}}} = a$
- $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1+4a})$
- $\sqrt{a - \sqrt{a - \sqrt{a - \cdots}}} = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1+4a})$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

16. $\sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{2} = \dots$

A. $4\sqrt{2}$

D. 1

B. $3+\sqrt{2}$

E. 0

C. $\sqrt{2}$

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x+\sqrt{y}}} - \sqrt{2} &= \frac{\sqrt{(2+1)+2\sqrt{(2)(1)}}}{\sqrt{2+\sqrt{1}}} - \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2+1} - \sqrt{2} = 1 \end{aligned}$$

17. Jika bilangan asli a dan b memenuhi $\sqrt{17+4\sqrt{15}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{5}$, maka $b - a = \dots$

A. -2

D. 2

B. -1

E. 3

C. 1

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow \sqrt{17+2\sqrt{60}} = \sqrt{x+\sqrt{y}}$$

$$\sqrt{17+2\sqrt{60}} = \sqrt{\underbrace{(12+5)}_{x+y} + 2\sqrt{\underbrace{(12)(5)}_{2\sqrt{x \cdot y}}}}$$

- diperoleh $x = 12$ dan $y = 5$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17+2\sqrt{60}} = \sqrt{12+\sqrt{5}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{17+4\sqrt{15}} = a\sqrt{3} + b\sqrt{5} \rightarrow a=2, b=1 \rightarrow a=2, b=1$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } b - a = -1$$

$$18. \left\{ 1 + \left(3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} = \dots$$

A. $\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

(D) $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$

E. $2 + \sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + \sqrt{3}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \left\{ 1 + \left(3 + \sqrt{13 + 4\sqrt{3}} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{3 + \sqrt{13 + 2\sqrt{12}}}}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{3 + \underbrace{\sqrt{\underbrace{(12+1)}_{x+y} + 2\sqrt{\underbrace{(12)(1)}_{2\sqrt{(x)(y)}}}}}_{\sqrt{x} + \sqrt{y}}}}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{3 + (\sqrt{12} + \sqrt{1})}}$$

$$= \sqrt{1 + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}}$$

$$= \sqrt{1 + \underbrace{\sqrt{\underbrace{(3+1)}_{a+b} + 2\sqrt{\underbrace{(3)(1)}_{2\sqrt{(a)(b)}}}}}_{\sqrt{a} + \sqrt{b}}}}$$

$$= \sqrt{1 + (\sqrt{3} + \sqrt{1})}$$

$$= \sqrt{2 + \sqrt{4 \cdot \frac{3}{4}}} = \sqrt{2 + 2\sqrt{\frac{3}{4}}}$$

19. $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \dots}}}} = x$ adalah
- A. 1
 B. $\sqrt{2}$
 C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 D. 2
 E. 4

Jawaban: D

$\Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \dots}}}} = x$

- kuadratkan di kedua ruasnya

$$\left(\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \dots}}}} \right)^2 = x^2$$

$$2x = x^2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ dan } x = 2$$

\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah 2

SOLUSI SMART!

- $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a \dots}}} = a$

$\Leftrightarrow \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \dots}}}} = 2$

20. Diketahui bahwa a dan b bilangan real yang didefinisikan sebagai berikut. $a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}$, $b = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$. Nilai $a+b = \dots$
- A. $\sqrt{26}$
 B. 8
 C. $2\sqrt{26}$
 D. 16
 E. 26

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow a = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}$$

- kuadratkan di kedua ruasnya

$$a^2 = 6 + \underbrace{\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}}}_a$$

$$a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow (a - 3)(a + 2) = 0$$

- $a = 3 \rightarrow$ **memenuhi**
- $a = -2 \rightarrow$ tidak memenuhi

$$\Leftrightarrow b = \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}$$

$$b^2 = 20 + \underbrace{\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}}}_b$$

$$b^2 - b - 20 = 0 \rightarrow (b - 5)(b + 4) = 0$$

- $b = 5 \rightarrow$ **memenuhi**
- $b = -4 \rightarrow$ tidak memenuhi

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } a + b = 3 + 5 = 8$$

SOLUSI SMART!

$$\bullet \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c + \dots}}}} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + 4c})$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow a &= \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots}}} \\ &= \frac{1}{2}\{1 + \sqrt{1 + 4(6)}\} = 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow b &= \sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots}}} \\ &= \frac{1}{2}\{1 + \sqrt{1 + 4(20)}\} = 5 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } a + b = 3 + 5 = 8$$

LATIHAN SOAL 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Bentuk sederhana dari $(1+3\sqrt{2})-(4-\sqrt{50})$ adalah
A. $-2\sqrt{2}-3$
B. $-\sqrt{2}+5$
C. $8\sqrt{2}-3$
D. $8\sqrt{2}+3$
E. $8\sqrt{2}+5$
2. $\sqrt{48}+\sqrt{75}-\sqrt{392}+\sqrt{128} = \dots$
A. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$
B. $3\sqrt{3}-2\sqrt{2}$
C. $3(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})$
D. $\sqrt{3}+\sqrt{2}$
E. $3(2\sqrt{3}+3\sqrt{2})$
3. Bentuk sederhana dari $\frac{bc\sqrt{a}\cdot\sqrt{abc}}{a\sqrt{bc}} = \dots$
A. $\frac{c}{a}$
B. $\frac{c}{b}$
C. ac
D. ab
E. bc

4. Jika $f(x) = x^2 - 1$ dan $g(x) = \sqrt{x} - 1$, maka $\frac{f(x)}{g(x)} = \dots$
- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| A. $(1 - \sqrt{x})(x - 1)$ | D. $(1 - \sqrt{x})(1 - x)$ |
| B. $(1 + \sqrt{x})(x - 1)$ | E. $(1 - \sqrt{x})(1 + x)$ |
| C. $(1 + \sqrt{x})(1 + x)$ | |
5. Jika $p = 1 + \sqrt{3}$, maka $p^2 - 2 = \dots$
- | | |
|------------|---------------|
| A. p | D. $1 + p$ |
| B. $2p$ | E. $2(1 + p)$ |
| C. $1 - p$ | |
6. Bentuk lain dari $(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$ adalah
- | | |
|---------------------|---------------------|
| A. $16 - 4\sqrt{6}$ | D. $10 - 4\sqrt{6}$ |
| B. $14 - 4\sqrt{6}$ | E. $10 - 2\sqrt{6}$ |
| C. $12 - 2\sqrt{6}$ | |
7. $\sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{16 \cdot \sqrt[3]{16 \dots}}} = \dots$
- | | |
|------|-------|
| A. 2 | D. 16 |
| B. 4 | E. 64 |
| C. 8 | |
8. Nilai dari $(\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5})(-\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 - \sqrt{5})(\sqrt{10} + 2\sqrt{3}) = \dots$
- | | |
|-------|------|
| A. -4 | D. 2 |
| B. -2 | E. 4 |
| C. 0 | |
9. Dari suatu tempat yang sama, Iwan berjalan sejauh 4 km ke arah selatan dan Heri berjalan sejauh 6 km ke arah barat. Setelah melalui perjalanan itu, jarak antara Iwan dan Heri adalah
- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. $2\sqrt{13}$ km | D. $13\sqrt{2}$ km |
| B. $3\sqrt{13}$ km | E. $13\sqrt{3}$ km |
| C. $2\sqrt{52}$ km | |

10. Sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan luas 180 m^2 . Jika perbandingan panjang dan lebarnya sama dengan 5 berbanding 4, maka panjang diagonal bidang tanah tersebut adalah

- A. 9 m
 B. $3\sqrt{41}$ m
 C. $6\sqrt{41}$ m
 D. $9\sqrt{41}$ m
 E. 81 m

11. Sebuah segitiga ABC siku-siku di B mempunyai luas $\frac{1}{2}(7 - 4\sqrt{3}) \text{ cm}^2$.

Jika panjang AB sama dengan panjang BC, maka keliling segitiga tersebut adalah

- A. $(\sqrt{6} + 4) \text{ cm}$
 B. $(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) \text{ cm}$
 C. $(6 - \sqrt{3}) \text{ cm}$
 D. $(4 - 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \text{ cm}$
 E. $(4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}) \text{ cm}$

12. Bentuk $\frac{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} - 2}{\sqrt[3]{5} - 1}$ dapat disederhanakan menjadi

- A. $\sqrt[3]{25} + 2\sqrt[3]{5} + 1$
 B. $\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{5} + 2$
 C. $\sqrt[3]{25} - 2\sqrt[3]{5}$
 D. $\sqrt[3]{25} - \sqrt[3]{5}$
 E. $\sqrt[3]{5} + 2$

13. Diketahui $x = 37 - 20\sqrt{3}$ dan $y = 37 + 20\sqrt{3}$ Nilai $x^{-\frac{1}{2}} + y^{-\frac{1}{2}}$

- A. $\frac{4}{3}$
 B. $\frac{7}{3}$
 C. $\frac{4}{9}$
 D. $\frac{10}{13}$
 E. $\frac{7}{13}$

14. Nilai $(2x-1)$ dari persamaan $\sqrt{\frac{x+5}{x-1}} - \sqrt{\frac{x-1}{x+5}} = \frac{3}{2}$ adalah

- A. 1
 B. 3
 C. 5
 D. 6
 E. 9

15. Jika $2 < x < 5$, nilai $\sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 - 10x + 25} = \dots$

- A. $2x - 7$ D. $-2x + 7$
 B. 3 E. $2x + 7$
 C. -3

16. Jika x memenuhi persamaan $\sqrt{x + \sqrt{4x - 4}} + \sqrt{x - \sqrt{4x - 4}} = 2$, maka $(x^2 - x) = \dots$

- A. 2 D. 8
 B. 3 E. 10
 C. 7

SOAL LATIHAN - 2

17. Penyederhanaan dari $\frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)} = \dots$

- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3

18. Dengan merasionalkan penyebut, bentuk sederhana dari $\frac{8}{3 + \sqrt{5}}$ adalah

- A. $-12 + 4\sqrt{5}$ D. $6 - \sqrt{5}$
 B. $6 - 2\sqrt{5}$ E. $6 + 2\sqrt{5}$
 C. $12 - 4\sqrt{5}$

19. Jika $a = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$ dan $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}$, maka $a + b = \dots$

- A. $4\sqrt{3}$ D. -4
 B. 4 E. $-4\sqrt{3}$
 C. 1

20. Jika bilangan bulat a dan b memenuhi $\frac{\sqrt{10}-\sqrt{5}}{\sqrt{10}+\sqrt{5}} = a+b\sqrt{2}$, maka

$(a+b) = \dots$

- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
 E. 5

21. Nilai x yang memenuhi persamaan $x+x\sqrt{3} = \sqrt{2}$ adalah

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+1)$
 B. $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}-1)$
 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\sqrt{3})$
 D. $\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$
 E. $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$

22. Diketahui persamaan $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 3$. Jika $x-y = 2$, maka nilai $x = \dots$

- A. $\frac{2}{3}$
 B. $\frac{5}{3}$
 C. $\frac{8}{3}$
 D. $\frac{4}{3}$
 E. $\frac{8}{3}$

23. Diketahui $x = 37 - 20\sqrt{3}$ dan $y = 37 + 20\sqrt{3}$. Nilai $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} \dots$

- A. $\frac{4}{3}$
 B. $\frac{7}{3}$
 C. $\frac{4}{9}$
 D. $\frac{10}{13}$
 E. $\frac{7}{13}$

24. Nilai dari $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{48}+\sqrt{49}}$ adalah

- A. 4
 B. 5
 C. 6
 D. 7
 E. 8

SOAL LATIHAN - 2

25. Bentuk sederhana dari $\sqrt{7+\sqrt{48}}$ adalah
- A. $\sqrt{8}+\sqrt{7}$ D. $\sqrt{5}+\sqrt{2}$
 B. $\sqrt{7}+\sqrt{6}$ E. $\sqrt{4}+\sqrt{3}$
 C. $\sqrt{6}+1$
26. Nilai $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \dots$
- A. 2 D. $\sqrt{2}$
 B. 3 E. $2\sqrt{6}$
 C. 4
27. Jika $\sqrt{0,3+\sqrt{0,08}} = \sqrt{a}+\sqrt{b}$, maka $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \dots$
- A. 25 D. 10
 B. 20 E. 5
 C. 15
28. $\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\sqrt{6-\dots}}}} = \dots$
- A. 1,5 D. 3,0
 B. 2,0 E. 3,5
 C. 2,5
29. Nilai x yang memenuhi persamaan $\sqrt{x-\sqrt{x-\sqrt{x-\dots}}} = 5$ adalah
- A. 25 D. 31
 B. 27 E. 35
 C. 30
30. Bentuk $\sqrt[4]{49-20\sqrt{6}}$ dapat disederhanakan menjadi
- A. $5-2\sqrt{6}$ D. $7-2\sqrt{6}$
 B. $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ E. $\sqrt{7}-2\sqrt{30}$
 C. $\sqrt{7}-2\sqrt{30}$



LOGARITMA

3

A. PENGERTIAN DAN SIFAT LOGARITMA

Bentuk ${}^a\log b$ adalah logaritma b dengan bilangan pokok a ,

- a disebut **bilangan pokok** dengan $a > 0$ dan $a \neq 1$.
- b disebut **bilangan yang dilogartimkan** dengan $b > 0$.

Sifat umum logaritma:

- ${}^a\log x + {}^a\log y = {}^a\log x \cdot y$
- ${}^a\log x - {}^a\log y = {}^a\log \frac{x}{y}$
- ${}^a\log a = 1$
- ${}^a\log x^n = n {}^a\log x$
- $a^{{}^a\log y} = y$
- $c^{{}^a\log b} = b^{{}^a\log c}$
- ${}^a\log b = {}^n\log b^n$
- ${}^a\log b = \frac{{}^c\log b}{{}^c\log a} = \frac{1}{{}^b\log a}$
- ${}^n\log b^m = \frac{m}{n} {}^a\log b$
- ${}^a\log b \cdot {}^b\log c \cdot {}^c\log d = {}^a\log d$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Hasil dari $\frac{1}{5} \log 625 + {}^{64} \log \frac{1}{16} + 4^{3 \cdot 25 \log 5} = \dots$

A. $-4^{\frac{19}{24}}$

D. $5\frac{1}{3}$

B. $3\frac{1}{3}$

E. $59\frac{1}{3}$

C. $4\frac{2}{3}$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{1}{5} \log 625 + {}^{64} \log \frac{1}{16} + 4^{3 \cdot 25 \log 5} \\ &= {}^{5^{-1}} \log 5^4 + {}^{4^3} \log 4^{-2} + 4^{5^2 \log 5^3} \\ &= \frac{4}{-1} + \left(\frac{-2}{3} \right) + (2^2)^{\frac{3}{2}} \\ &= -4 - \frac{2}{3} + 8 = 3\frac{1}{3} \end{aligned}$$

2. Bentuk sederhana dari $\frac{\log^2 a - \log^2 b}{\log a + \log b}$ adalah

A. -1

D. $\log a - b$

B. 1

E. $\log(a-b)$

C. $\log \frac{a}{b}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{\log^2 a - \log^2 b}{\log a + \log b} \\ &= \frac{(\log a + \log b)(\log a - \log b)}{(\log a + \log b)} \\ &= \log a - \log b = \log \frac{a}{b} \end{aligned}$$

3. Jika ${}^a \log b + {}^b \log a = 3$, maka nilai $({}^a \log b)^2 + ({}^b \log a)^2$ adalah
- A. 2
B. 5
C. 7
D. 9
E. 11

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow {}^a \log b + {}^b \log a = 3 \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$({}^a \log b)^2 + 2 \cdot \underbrace{({}^a \log b \cdot {}^b \log a)}_{{}^a \log a} + ({}^b \log a)^2 = 9$$

$$({}^a \log b)^2 + ({}^b \log a)^2 = 9 - 2 = 7$$

4. Jika ${}^2 \log \sqrt{3} = a$, maka nilai ${}^4 \log 27$ adalah
- A. $3a$
B. $\frac{3}{2}a$
C. $\frac{2}{3}a$
D. $\frac{3}{4}a$
E. $\frac{1}{2}a$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow {}^2 \log \sqrt{3} = a \rightarrow ({}^2)^2 \log (\sqrt{3})^2 = a$$

$${}^4 \log 3 = a$$

$${}^4 \log 27 = {}^4 \log (3)^3 = 3 \cdot {}^4 \log 3 = 3a$$

5. Jika ${}^7 \log 2 = a$ dan ${}^2 \log 3 = b$, maka ${}^6 \log 98 = \dots$
- A. $\frac{a}{a+b}$
B. $\frac{a+2}{b+1}$
C. $\frac{a+2}{a(b+1)}$
D. $\frac{a+1}{b+2}$
E. $\frac{a+2}{b(a+1)}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow {}^6\log 98 &= \frac{{}^2\log 98}{{}^2\log 6} \\
 &= \frac{{}^2\log (2.7^2)}{{}^2\log (2.3)} \\
 &= \frac{{}^2\log 2 + 2 \cdot {}^2\log 7}{{}^2\log 2 + {}^2\log 3} \\
 &= \frac{1 + 2\left(\frac{1}{a}\right)}{1+b} \rightarrow \text{dikali } \left(\frac{a}{a}\right) \\
 &= \frac{a+2}{a(b+1)}
 \end{aligned}$$

6. Jika diketahui ${}^a\log b = m$ dan ${}^b\log c = n$, maka ${}^{ab}\log bc = \dots$

- A. $m+n$ D. $\frac{n(1+m)}{1+n}$
 B. $m \cdot n$ E. $\frac{1+mn}{1+m}$
 C. $\frac{m(1+n)}{1+m}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow {}^{ab}\log bc &= \frac{{}^a\log bc}{{}^a\log ab} \\
 &= \frac{{}^a\log b + {}^a\log c}{{}^a\log a + {}^a\log b} \\
 &= \frac{m+mn}{1+m} = \frac{m(1+n)}{1+m}
 \end{aligned}$$

7. Jika ${}^b\log a + {}^b\log a^2 = 4$, maka nilai ${}^a\log b$ adalah

- A. $\frac{3}{4}$ D. 2
 B. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$
 C. $\frac{4}{3}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow {}^b \log a + {}^b \log a^2 = 4$$

$${}^b \log a + 2({}^b \log a) = 4$$

$$3({}^b \log a) = 4 \rightarrow {}^b \log a = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow {}^a \log b = \frac{3}{4}$$

8. Jika ${}^{x+y} \log 2 = a$ dan ${}^{x-y} \log 8 = b$, dengan $0 < y < x$, maka ${}^4 \log(x^2 - y^2) = \dots$

A. $\frac{a+3b}{ab}$

D. $\frac{3a+b}{2ab}$

B. $\frac{a+b}{2ab}$

E. $\frac{3a+b}{4ab}$

C. $\frac{a+b}{4ab}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow {}^{x+y} \log 2 = a$$

$${}^{x-y} \log(2)^3 = b \rightarrow {}^{x-y} \log 2 = \frac{b}{3}$$

$$\Leftrightarrow {}^4 \log(x^2 - y^2)$$

$$= {}^2 \log(x+y)(x-y)$$

$$= \frac{1}{2} \{ {}^2 \log(x+y) + {}^2 \log(x-y) \}$$

$$= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{3}{b} \right\}$$

$$= \frac{3a+b}{2ab}$$

9. Jika ${}^a \log 81^b = {}^b \log 27^a$ dengan $a, b > 0$, maka nilai dari $\left((a)^{\frac{1}{3a}} \cdot \log(b)^{\frac{1}{b}} \right)^{\frac{1}{2}}$ adalah

A. $\frac{2a}{3b}$

D. $\frac{3a}{2b}$

B. $\frac{3a}{4b}$

E. $\frac{4a}{3b}$

C. $\frac{a}{b}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow {}^a \log 81^b = {}^b \log 27^a$$

$${}^a \log(3)^{4b} = {}^b \log(3)$$

$$(4b) \cdot {}^a \log 3 = (3a) \cdot {}^b \log 3$$

$${}^a \log b = \frac{3a}{4b}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt[{\frac{1}{a^{3a}}}]{{}^a \log(b)^{\frac{1}{b}}} &= \sqrt{\frac{3a}{b} \cdot ({}^a \log b)} \\ &= \sqrt{\frac{3a}{b} \left(\frac{3a}{4b} \right)} \\ &= \sqrt{\left(\frac{3a}{2b} \right)^2} = \frac{3a}{2b} \end{aligned}$$

B. PERSAMAAN LOGARITMA

1. Bentuk dasar:

- ${}^a \log f(x) = {}^a \log p \quad \rightarrow f(x) = p$
- ${}^a \log f(x) = {}^a \log g(x) \quad \rightarrow f(x) = g(x)$
- ${}^a \log f(x) = c \quad \rightarrow f(x) = a^c$
- ${}^{g(x)} \log f(x) = c \quad \rightarrow f(x) = g(x)^c$
- ${}^a \log f(x) = {}^b \log f(x) \quad \rightarrow f(x) = 1$

2. Bentuk: $a^{f(x)} = b^{g(x)}$

Untuk memudahkan penyelesaian bentuk ini operasikan logaritma dikedua ruasnya.

3. Persamaan bentuk lain, biasanya menggunakan permisalan sehingga memudahkan penyelesaian.

Catatan: Untuk penyelesaian akhir, perhatikan syarat logaritma.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

10. Nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{1}{2}\log(x^2 - 3) - \frac{1}{2}\log x = -1$ adalah
- A. $x = -1$ atau $x = 3$ D. $x = 1$ saja
B. $x = 1$ atau $x = -3$ E. $x = 3$ saja
C. $x = 1$ atau $x = 3$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log(x^2 - 3) - \frac{1}{2}\log x = -1$$

$$\frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2 - 3}{x}\right) = \frac{1}{2}\log 2$$

$$\left(\frac{x^2 - 3}{x}\right) = 2 \rightarrow \text{dikali silang}$$

$$x^2 - 3 = 2x$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x-3)(x+1) = 0$$

- $x = 3 \rightarrow$ memenuhi
- $x = -1 \rightarrow$ tidak memenuhi

11. Jika ${}^x\log 3 = 0,4$, maka $x = \dots$

- A. $2\sqrt{3}$ D. $6\sqrt{3}$
B. $4\sqrt{3}$ E. $9\sqrt{3}$
C. $5\sqrt{3}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow {}^x\log 3 = \frac{2}{5}$$

$$3 = x^{\frac{2}{5}}$$

$$x = 3^{\frac{5}{2}} = 3^2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 9\sqrt{3}$$

12. Nilai x yang memenuhi $8^{x+1} = 24^{x-1}$ adalah

- A. $1 + 6^2\log 3$ D. $1 - 4^3\log 2$
B. $1 + 4^2\log 3$ E. $1 - 6^3\log 2$
C. $1 + 6^3\log 2$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 8^{x+1} &= 24^{x-1} \\ \log 8^{x+1} &= \log 24^{x-1} \\ (x+1) \log 8 &= (x-1) \log 24 \\ x \log 8 + \log 8 &= x \log 24 - \log 24 \\ \log 8 + \log 24 &= x (\log 24 - \log 8) \\ \log 192 &= x \log 3 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{\log 192}{\log 3} = {}^3 \log 192 \\ &= {}^3 \log (3 \cdot 2^6) \\ &= 1 + 6 {}^3 \log 2 \end{aligned}$$

13. Nilai x yang memenuhi persamaan ${}^2 \log {}^2 \log (2^{x+1} + 3) = 1 + {}^2 \log x$ adalah

- A. ${}^2 \log 3$ D. -1 atau 3
B. ${}^3 \log 2$ E. 8 atau $\frac{1}{2}$
E. $\log \frac{2}{3}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow {}^2 \log {}^2 \log (2^{x+1} + 3) &= {}^2 \log 2 + {}^2 \log x \\ {}^2 \log {}^2 \log (2 \cdot 2^x + 3) &= {}^2 \log 2x \\ {}^2 \log (2 \cdot 2^x + 3) &= 2x \\ (2 \cdot 2^x + 3) &= 2^{2x} \\ 0 &= (2^x)^2 - 2(2^x) - 3 \\ 0 &= (2^x - 3)(2^x + 1) \\ \bullet \quad 2^x = 3 &\rightarrow x = {}^2 \log 3 \\ \bullet \quad 2^x = -1 &\rightarrow x = \{\phi\} \end{aligned}$$

14. Jika x memenuhi persamaan $x^{2 \log x} = 16$, maka ${}^4 \log x^2 = \dots$

- A. 2 atau -2 D. 4 atau -4
B. 4 atau $\frac{1}{4}$ E. 2 atau $\frac{1}{2}$
C. 1 atau -1

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow x^{2\log x} &= 16 \\ {}^2\log(x^{2\log x}) &= {}^2\log 16 = 4 \\ ({}^2\log x)^2 &= 4 \\ {}^2\log x &= \pm 2 \\ \Leftrightarrow {}^4\log x^2 = {}^{2^2}\log x^2 = {}^2\log x &= \pm 2 \end{aligned}$$

15. Solusi persamaan ${}^x\log(x+2) - 3{}^x\log 2 + 1 = 0$ adalah

- | | |
|------|------|
| A. 0 | D. 3 |
| B. 1 | E. 4 |
| C. 2 | |

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow {}^x\log(x+2) - 3{}^x\log 2 + 1 &= 0 \\ {}^x\log(x+2) - {}^x\log 2^3 &= -1 \\ {}^x\log\left(\frac{x+2}{8}\right) &= {}^x\log\frac{1}{x} \\ \left(\frac{x+2}{8}\right) &= \frac{1}{x} \\ x^2 + 2x &= 8 \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x+4)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

- $x = -4 \rightarrow$ tidak memenuhi
- $x = 2 \rightarrow$ memenuhi

16. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $({}^3\log x)^2 - 3({}^3\log x) + 2 = 0$, maka $x_1 \cdot x_2 = \dots$

- | | |
|------|-------|
| A. 2 | D. 24 |
| B. 3 | E. 27 |
| C. 8 | |

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow ({}^3\log x)^2 - 3({}^3\log x) + 2 = 0$$
$$({}^3\log x - 2)({}^3\log x - 1) = 0$$

- ${}^3\log x = 2 \rightarrow x_1 = 3^2 = 9$
- ${}^3\log x = 1 \rightarrow x_2 = 3^1 = 3$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = (9) \cdot (3) = 27$$

SOLUSI SMART!

$$a({}^p\log x)^2 + b({}^p\log x) + c = 0 \rightarrow x_1 \cdot x_2 = p^{-\frac{b}{a}}$$

$$\Leftrightarrow ({}^3\log x)^2 - 3({}^3\log x) + 2 = 0$$

$a = 1, b = -3, c = 2$ dan $p = 3$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = (3)^{-\frac{-(-3)}{1}} = 27$$

17. Hasil kali akar-akar persamaan ${}^3\log x^{(2+{}^3\log x)} = 15$ adalah

- A. 1/9
- B. 1/3
- C. 1
- D. 3
- E. 9

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow {}^3\log x^{(2+{}^3\log x)} = 15$$
$$(2+{}^3\log x) \cdot {}^3\log x = 15$$
$$({}^3\log x)^2 + 2({}^3\log x) - 15 = 0$$

misal: $p = {}^3\log x$

$$p^2 + 2p - 15 = 0$$
$$p_1 + p_2 = -\frac{b}{a}$$
$${}^3\log x_1 + {}^3\log x_2 = -2$$
$${}^3\log x_1 \cdot x_2 = -2$$
$$x_1 \cdot x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

SOLUSI SMART!

$$a({}^p \log x)^2 + b({}^p \log x) + c = 0 \rightarrow x_1 \cdot x_2 = p^{-\frac{b}{a}}$$

$$\Leftrightarrow ({}^3 \log x)^2 + 2({}^3 \log x) - 15 = 0$$

$$a = 1, b = 2, \text{ dan } p = 3$$

$$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{9}$$

C. PERTIDAKSAMAAN DAN FUNGSI LOGARITMA

a. Pertidaksamaan

Bentuk: ${}^a \log f(x) \geq {}^a \log g(x)$

- $a > 1 \rightarrow f(x) \geq g(x)$
- $0 < a < 1 \rightarrow f(x) \leq g(x)$

syarat log: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Bentuk: ${}^a \log f(x) < {}^a \log g(x)$

- $a > 1 \rightarrow f(x) \leq g(x)$
- $0 < a < 1 \rightarrow f(x) \geq g(x)$

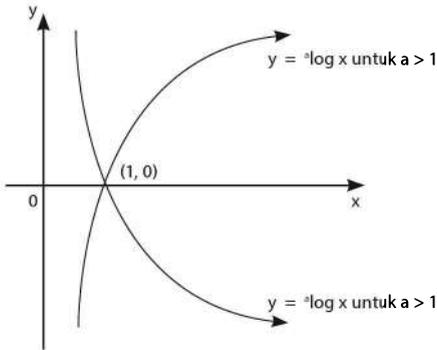
syarat log: $f(x) > 0$ dan $g(x) > 0$

Catatan: Penyelesaian akhir diperoleh dari irisan penyelesaian soal dan syarat logaritma.

b. Fungsi Logaritma

Bentuk dasar fungsi logaritma adalah:

$$y = f(x) = {}^a \log x, a > 0, a \neq 1 \text{ dan } x > 0$$



Sifat fungsi logaritma:

- Grafik fungsi selalu disebelah kanan sumbu y
- Memotong sumbu x di titik (1,0)
- Mempunyai asimtot tegak $x = 0$
- Monoton naik untuk $a > 1$, dan monoton turun untuk $0 < a < 1$
- Mempunyai fungsi invers, yaitu fungsi eksponen
 $f(x) = {}^a \log x \rightarrow f^{-1}(x) = a^x$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

18. Penyelesaian dari ${}^2 \log(x-3) + {}^2 \log(x+3) \geq 4$ adalah

- | | |
|-----------------|--------------------|
| A. $x \geq 5$ | D. $-3 < x \leq 5$ |
| B. $x \geq 3$ | E. $3 \leq x < 5$ |
| C. $-3 < x < 3$ | |

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow {}^2 \log(x-3) + {}^2 \log(x+3) \geq 4$$

$${}^2 \log(x-3)(x+3) \geq 4$$

$$(x^2 - 9) \geq 2^4$$

$$x^2 - 25 \geq 0$$

$$(x-5)(x+5) \geq 0 \quad \dots(1)$$

- Syarat log: $(x - 3) > 0 \rightarrow x > 3$... (2)
- $(x + 5) > 0 \rightarrow x > -5$... (3)

\Leftrightarrow Irisan (1), (2) dan (3) adalah $x \geq 5$

19. Nilai-nilai x yang memenuhi $^{1/2}\log(x^2 - 3) > 0$ adalah

- A. $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$
- B. $-2 < x < 2$
- C. $-2 < x < -\sqrt{3}$ atau $\sqrt{3} < x < 2$
- D. $x \geq 2$ atau $x \leq -2$
- E. $x > 2$ atau $x < \sqrt{3}$

Jawaban: C

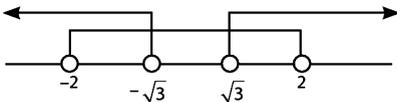
$$\Leftrightarrow \quad ^{1/2}\log(x^2 - 3) > 0$$

$$(x^2 - 3) < \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$(x^2 - 4) < 0$$

$$(x - 2)(x + 2) < 0 \quad \dots(1)$$

- **Syarat log:** $(x^2 - 3) > 0$
- $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) > 0 \quad \dots(2)$



\Leftrightarrow Irisan (1) & (2) adalah $-2 < x < -\sqrt{3}$ atau $\sqrt{3} < x < 2$

20. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2 \log x \leq \log(2x + 5) + 2 \log 2$ adalah

- A. $-\frac{5}{2} < x \leq 10$
- B. $-2 \leq x \leq 10$
- C. $0 < x \leq 10$
- D. $-2 < x < 0$
- E. $-\frac{5}{2} \leq x < 0$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 2 \cdot \log x &\leq \log (2x+5) + 2 \log 2 \\ \log x^2 &\leq \log (2x+5) + \log 2^2 \\ \log x^2 &\leq \log 4 \cdot (2x+5) \\ x^2 &\leq 8x + 20 \\ x^2 - 8x - 20 &\leq 0 \\ (x - 10)(x + 2) &\leq 0 \quad \dots(1)\end{aligned}$$

• **Syarat log:** $x > 0$... (2)

$$(2x + 5) > 0$$

$$x > -\frac{5}{2} \quad \dots(3)$$

\Leftrightarrow Irisan (1), (2) dan (3) adalah $0 < x \leq 10$

SOLUSI SMART!

\Leftrightarrow Dari syarat log diperoleh $x > 0$
Pertidaksamaan tersebut hanya dipenuhi oleh nilai jawaban C.

21. Himpunan penyelesaian pertaksamaan ${}^2\log^2x + 2 {}^2\log 2x > 2$ adalah

- A. $\{x \mid 1 < x < 4\}$ D. $\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4} \text{ atau } x > 1\}$
B. $\{x \mid \frac{1}{4} < x < 1\}$ E. $\{x \mid 0 < x < 1 \text{ atau } x > 4\}$
C. $\{x \mid x < \frac{1}{4} \text{ atau } x > 1\}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow {}^2\log^2x + 2 ({}^2\log 2 + {}^2\log x) &> 2 \\ {}^2\log^2x + 2 + 2 {}^2\log x &> 2 \\ {}^2\log x ({}^2\log x + 2) &> 0 \\ {}^2\log x < -2 \text{ atau } {}^2\log x > 0 \\ x < \frac{1}{4} \text{ atau } x > 1 &\quad \dots(1)\end{aligned}$$

• **Syarat log:** $x > 0$... (2)

\Leftrightarrow Irisan dari (1) dan (2) adalah $0 < x < \frac{1}{4} \text{ atau } x > 1$

22. Nilai-nilai x yang memenuhi ${}^2\log x - \frac{1}{x}\log \frac{1}{2} \geq 0$ adalah

A. $\frac{1}{2} < x < 1$

D. $\frac{1}{2} < x < 1$ atau $x > 2$

B. $1 \leq x \leq 2$

E. $\frac{1}{2} < x < 1$ atau $x \geq 2$

C. $1 < x \leq 2$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow {}^2\log x - \frac{1}{x}\log \frac{1}{2} \geq 0$$

$${}^2\log x - {}^x\log 2 \geq 0$$

$${}^2\log x - \frac{1}{{}^2\log x} \geq 0$$

$$\frac{({}^2\log x)^2 - 1}{{}^2\log x} \geq 0$$

$$\frac{({}^2\log x - 1)({}^2\log x + 1)}{{}^2\log x} \geq 0$$

$$-1 \leq {}^2\log x \leq 0 \text{ atau } {}^2\log x \geq 1$$

$${}^2\log \frac{1}{2} < {}^2\log x < {}^2\log 1 \text{ atau } {}^2\log x \geq {}^2\log 2$$

$$\frac{1}{2} < x < 1 \text{ atau } x \geq 2 \quad \dots(1)$$

• **Syarat log:** $x \geq 0 \quad \dots(2)$

$$\Leftrightarrow \text{Irisan (1) dan (2) adalah } \frac{1}{2} < x < 1 \text{ atau } x \geq 2$$

23. Nilai x yang memenuhi $\frac{2x^{\log 4x}}{x^{\log 2x}} < \frac{1}{2}$ adalah

A. $x < -100$

D. $\frac{1}{100} < x < \frac{1}{10}$

B. $x < -10$

E. $2 < x < 10$

C. $0 < x < \frac{1}{100}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{2x^{\log 4x}}{x^{\log 2x}} < \frac{1}{2}$$

$$2(x^{\log 4x - \log 2x}) < 2^{-1}$$

$$2(x^{\log \frac{4x}{2x}}) < 2^{-1}$$

$$2(x^{\log 2}) < 2^{-1}$$

$$2(2^{\log x}) < 2^{-1}$$

$$2^{1+\log x} < 2^{-1}$$

$$1 + \log x < -1$$

$$\log x < -2$$

$$x < \frac{1}{100} \quad \dots(1)$$

• Syarat log: $x > 0$...(2)

$$\Leftrightarrow \text{Irisan (1) dan (2) adalah } 0 < x < \frac{1}{100}$$

24. Jika $(2x)^{1+2\log 2x} > 64x^3$, maka

A. $\frac{1}{4} < x < 4$

D. $0 < x < \frac{1}{4}$

B. $x < \frac{1}{4}$ atau $x > 4$

E. $x > \frac{1}{4}$ atau $x > 2$

C. $0 < x < \frac{1}{4}$ atau $x > 4$

Jawaban: C

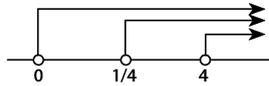
$$\Leftrightarrow (2x)^{1+2\log 2x} > 64x^3$$

$$(2x)^{2\log 2 + 2\log 2x} > (4x)^3$$

$$(2x)^{2\log(4x)} > (4x)^3$$

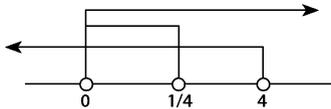
$$(4x)^{2\log(2x)} > (4x)^3$$

- Untuk bilangan pokok $a > 1$
 $4x > 1 \rightarrow {}^2\log(2x) > 3$
 $(2x) > 8 \rightarrow x > 4$
syarat log: $(2x) > 0$



Nilai x yang memenuhi $x > 4$... (1)

- Untuk bilangan pokok $0 < a < 1$
 $0 < 4x < 1 \rightarrow {}^2\log(2x) < 3$
 $(2x) < 8 \rightarrow x < 4$
syarat log: $(2x) > 0$



Nilai x yang memenuhi: $0 < x < \frac{1}{4}$... (2)

⇔ Gabungan (1) dan (2) adalah:

$$x > 4 \text{ atau } 0 < x < \frac{1}{4}$$

LATIHAN SOAL 3

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika $\log(2x + y) = 1$ dan $2^y = \frac{2^{2x}}{4}$, maka $xy = \dots$
 - A. $\frac{3}{4}$
 - B. 7
 - C. 8
 - D. 12
 - E. 16
2. Diketahui ${}^3\log 2 = x$ dan ${}^2\log 5 = y$, maka ${}^5\log 15 = \dots$
 - A. $\frac{x+y+1}{x+y}$
 - B. $\frac{xy+1}{xy}$
 - C. $\frac{xy}{x+y}$
 - D. $\frac{1}{x+y}$
 - E. $\frac{1}{xy}$
3. Nilai dari $\frac{1}{5}\log\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}\log 25 + 9^{{}^3\log 4} = \dots$
 - A. 6
 - B. 8
 - C. 10
 - D. 16
 - E. 22
4. Jika $\frac{1}{{}^{81}\log 4} - \frac{1}{{}^3\log 2}$ adalah \dots
 - A. ${}^3\log 2$
 - B. ${}^3\log 3$
 - C. ${}^2\log 2$
 - D. ${}^2\log 4$
 - E. ${}^3\log 4$

5. Nilai $\left({}^a\log\frac{1}{b^2}\right)\left({}^b\log\frac{1}{c^2}\right)\left({}^c\log\frac{1}{a^3}\right) = \dots$
- A. -14
B. -12
C. -10
D. -8
E. -6
6. $\frac{({}^4\log 3)({}^4\log 6)}{({}^4\log 9)({}^8\log 2) + ({}^4\log 9)({}^8\log 3)}$ sama dengan
- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{3}{4}$
C. $\frac{4}{3}$
D. 2
E. 3
7. Jika $a = {}^7\log 2$ dan $b = {}^2\log 3$, maka $\frac{a+2}{a(b+1)} = \dots$
- A. ${}^4\log 6$
B. ${}^6\log 4$
C. ${}^6\log 98$
D. ${}^{98}\log 6$
E. 1
8. Jika $x = {}^2\log 3$ dan $y = {}^3\log 2$, maka $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot {}^3\log 5 = \dots$
- A. ${}^3\log 10$
B. ${}^2\log 5$
C. $2 \cdot {}^2\log 5$
D. ${}^5\log 2$
E. $2 \cdot {}^5\log 2$
9. Jika $\frac{{}^2\log ab}{{}^2\log a} = 3$ dan ${}^{bc}\log a = \frac{2}{3}$, maka nilai ${}^c\log a$ adalah
- A. -2
B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. 2

10. Bentuk sederhana dari $\frac{{}^2\log^2 a - {}^2\log^2 b}{{}^2\log ab}$ adalah
- A. ${}^2\log \frac{a}{b}$ D. ${}^2\log(a+b)$
B. ${}^2\log ab$ E. ${}^2\log(a+b)^2$
C. ${}^2\log(a-b)$
11. Jika $6(3^{40})({}^2\log a) + 3^{41}({}^2\log a) = 3^{43}$, maka nilai a adalah
- A. $\frac{1}{8}$ D. 8
B. $\frac{1}{4}$ E. 16
C. 4
12. $\frac{3 + \log(\log x)}{3 \log(\log x^{1000})} = \dots$
- A. $1 + \frac{1}{\log(\log x)}$ D. $1\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{3000} + \frac{1}{100 \log(\log x)}$ E. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{3} + \frac{1}{100 \log(\log x)}$

SOAL LATIHAN - 1

13. Himpunan penyelesaian dari persamaan ${}^2\log x + {}^2\log(x+2) = 3$ adalah
- A. $\{-4, 2\}$ D. $\{2\frac{1}{2}\}$
B. $\{-4\}$ E. $\{4\}$
C. $\{2\}$
14. Himpunan penyelesaian persamaan ${}^2\log(x^2 + 7x - 1) = {}^2\log(2x^2 + 2x + 6)$ adalah
- A. $\{6, 1\}$ D. $\{-2, -3\}$
B. $\{-6, 1\}$ E. $\{2, -3\}$
C. $\{2, 3\}$

15. Jika $2^3 \log y = {}^3 \log (x+1) + 2$, maka
- A. $y = x+3$ D. $y^2 = 9(x+1)$
 B. $y = 3x+3$ E. $y^2 = 3(x+1)$
 C. $y^2 = -9(x+1)$
16. Penyelesaian persamaan ${}^2 \log (x-2) - {}^4 \log (2x^2 - 12x + 19) = 0$ adalah α dan β . Untuk $\alpha < \beta$, maka nilai $2\alpha - \beta = \dots$
- A. -11 D. 1
 B. -7 E. 7
 C. -1
17. x adalah persamaan $x^{10 \log x} = 10.000$. Dengan demikian ${}^{100} \log x$ sama dengan
- A. -4 atau 4 D. -1 atau 1
 B. -3 atau 3 E. $-\frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$
 C. -2 atau 2
18. Jika x memenuhi persamaan ${}^4 \log {}^4 \log x - {}^4 \log {}^4 \log {}^4 \log 16 = 2$, maka ${}^{16} \log x$ sama dengan
- A. 4 D. -2
 B. 2 E. -4
 C. 1
19. Dari persamaan ${}^x \log (2x+8) - 3^x \log 4 + 1 = 0$ dan $3^{(x+4y)} = \frac{1}{81}$ diperoleh $y = \dots$
- A. 1 D. -2
 B. 0 E. -3
 C. -1
20. Nilai x yang memenuhi persamaan ${}^2 \log {}^2 \log (2^{x+1}+3) = 1 + {}^2 \log x$ adalah
- A. $\log \frac{2}{3}$ D. -1 atau 3
 B. ${}^2 \log 3$ E. 8 atau $\frac{1}{2}$
 C. ${}^3 \log 2$

21. Jumlah semua akar persamaan

$$10(x^2 - x - 12)^{\log(x^2 - x - 12)} = (x - 4)^2(x + 3)^2 \text{ adalah}$$

- A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

22. Diketahui $2 \cdot ({}^4\log x)^2 - 2 \cdot ({}^4\log \sqrt{x}) = 1$. Jika akar-akar persamaan di atas adalah x_1 dan x_2 , maka $x_1 + x_2 = \dots$

- A. 5
B. $4\frac{1}{2}$
C. $4\frac{1}{4}$
D. $2\frac{1}{2}$
E. $2\frac{1}{4}$

23. Jika x_1 dan x_2 memenuhi persamaan ${}^2\log x^{(1+{}^2\log x)} = 2$, maka nilai $x_1 + x_2 = \dots$

- A. $2\frac{1}{4}$
B. $2\frac{1}{2}$
C. $4\frac{1}{4}$
D. $4\frac{1}{2}$
E. $6\frac{1}{4}$

24. Jika x_1 dan x_2 memenuhi persamaan $\frac{{}^2\log \frac{x^2}{4}}{{}^2\log x} + {}^2\log 4x = \frac{4}{{}^2\log x}$, maka nilai $x_1 \cdot x_2$ adalah

- A. 2^4
B. 2^2
C. 2^{-2}
D. 2^{-4}
E. 2^{-8}

25. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan

$$\left({}^5\log(x+3)\right)^2 + 3 \cdot {}^5\log(x+3) = {}^5\log \frac{1}{25}, \text{ maka } |x_1 - x_2| = \dots$$

- A. 0,12
B. 0,14
C. 0,16
D. 0,18
E. 0,20

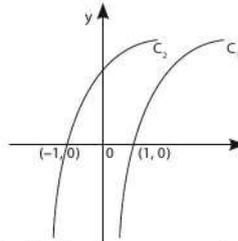
26. Jika ${}^4\log({}^2\log x) + {}^2\log({}^4\log x) = 2$, maka ${}^5\log\sqrt{x + \sqrt{x} + 5} = \dots$
- A. 1
B. 2
C. 4
D. 5
E. 16
27. Jika x_1 dan x_2 penyelesaian persamaan $\frac{{}^2\log x - 1}{{}^x\log 2} = 2$, maka ${}^{x_1}\log x_2 + {}^{x_2}\log x_1 = \dots$
- A. $\frac{5}{2}$
B. $\frac{3}{2}$
C. 1
D. $-\frac{3}{2}$
E. $-\frac{5}{2}$
28. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan $5^{\log(4x^2+3)} + 4^{2\log(x^2+1)} = 39$, maka $a + b = \dots$
- A. 5
B. $\sqrt{5} + \sqrt{7}$
C. 2
D. 0
E. -2
29. Jika x_1 dan x_2 dengan $x_1 > x_2$ merupakan akar-akar persamaan $\frac{(x-a)}{(x-a)^{\log(x-a)}} = 1$ dengan a konstanta positif, maka $x_1 - x_2$ adalah
- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10
30. Hasil kali nilai-nilai x yang memenuhi persamaan $\frac{x^{2 \cdot {}^{10}\log x - 6}}{1000} = \frac{1000}{x^2}$ adalah
- A. 10^5
B. 10^4
C. 10^3
D. 10^2
E. 10

36. Nilai x yang memenuhi $\frac{1}{{}^2\log x} - \frac{1}{{}^2\log x - 1} < 1$ adalah
- A. $x < 1$ atau $x > 2$ D. $x < 2$ atau $x > 3$
 B. $1 < x < 2$ E. $0 < x < 1$ atau $x > 2$
 C. $0 < x < 2$

37. Nilai-nilai x yang memenuhi ${}^2\log x - {}^x\log 2 > 0$ adalah
- A. $x > \frac{1}{2}$ D. $-1 < x < 0$ atau $x > 1$
 B. $x > 1$ E. $1 < x < 2$
 C. $\frac{1}{2} < x < 1$ atau $x > 2$

38. Himpunan penyelesaian pertaksamaan ${}^2\log\left(x + \frac{12}{x}\right) \geq 3$ adalah
- A. $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6\}$
 B. $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6\}$
 C. $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ atau } 2 \leq x \leq 6\}$
 D. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ atau } x \geq 6\}$
 E. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 6\}$

39. C_1 grafik fungsi $y = {}^2\log x$, $C_2 =$ grafik fungsi $y = \dots$
- A. ${}^2\log x - 2$
 B. ${}^2\log(x-2)$
 C. ${}^2\log(x+2)$
 D. ${}^2\log x + 2$
 E. $2 \cdot {}^2\log x$



40. Suatu populasi hewan mengikuti hukum pertumbuhan yang berbunyi $N(t) = 100.000 \cdot 2^{t-2}$
 $N(t)$: besar populasi pada saat t
 t : waktu dalam satuan tahun
 Agar besar populasi menjadi 3 kali lipat populasi awal (saat $t = 0$), maka $t = \dots$
- A. ${}^{10}\log 3$ D. ${}^2\log 3 - 2$
 B. ${}^{10}\log 3 - 2$ E. ${}^2\log 3$
 C. ${}^2\log 3 - 4$



PERSAMAAN GARIS

4

A. GRADIEN DAN HUBUNGAN GARIS LURUS

a. Gradien Garis Lurus

- Gradien garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) serta membentuk sudut α dengan sumbu X arah positif adalah:

$$m = \tan \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- Bentuk persamaan umum garis:

$$y = mx + n \rightarrow \text{gradien} = m$$

$$Ax + By + C = 0 \rightarrow \text{gradien} = m = -\frac{A}{B}$$

b. Hubungan Dua Garis Lurus

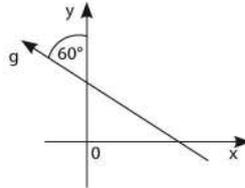
Hubungan garis $g_1: y = m_1x + c$ dan garis $g_2: y = m_2x + d$ adalah:

- g_1 sejajar ($//$) $g_2 \rightarrow m_1 = m_2$
- g_1 tegak lurus (\perp) $g_2 \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$
- g_1 dan g_2 membentuk sudut $\alpha \rightarrow \tan \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 \cdot m_2} \right|$

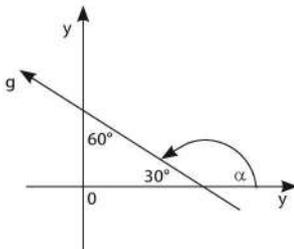
CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Gradien garis g adalah

- A. $-\sqrt{3}$
- B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- C. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
- D. $\sqrt{3}$
- E. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$



Jawaban: B



$$\Leftrightarrow m_g = \tan \alpha \\ = \tan 150^\circ = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

2. Jika dua garis yang memenuhi persamaan matriks $\begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \end{pmatrix}$ sejajar, maka nilai dari $ab = \dots$

- A. -4
- B. -2
- C. 1
- D. 2
- E. 4

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 2 \\ 1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -18 \end{pmatrix}$$

$$\bullet \quad ax + 2y = 16 \rightarrow m_1 = -\frac{a}{2}$$

$$\bullet \quad x + by = -18 \rightarrow m_2 = -\frac{1}{b}$$

\Leftrightarrow Karena **sejajar**, maka:

$$m_1 = m_2 \rightarrow \left(-\frac{a}{2}\right) = \left(-\frac{1}{b}\right) \rightarrow ab = 2$$

3. Titik (6, m) dan titik (-3, 3) terletak pada garis lurus yang sejajar garis $2x + 3y = 6$. Nilai m yang memenuhi adalah

- A. -1
- B. -2
- C. -3
- D. -6
- E. -9

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow 2x + 3y = 6 \rightarrow m_1 = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Karena sejajar (//)} \rightarrow m_1 = m_2 = -\frac{2}{3}$$

\Leftrightarrow Gradien garis melalui (6, m) dan (-3, 3) adalah:

$$-\frac{2}{3} = \frac{m-3}{6-(-3)}$$

$$-18 = 3m - 9 \rightarrow m = -3$$

4. Jika penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} (a-2)x + y = 0 \\ x + (a-2)y = 0 \end{cases}$ tidak hanya (x,y) = (0, 0) saja, maka nilai $a^2 - 4a + 3 = \dots$

- A. 0
- B. 1
- C. 4
- D. 9
- E. 16

Jawaban: D

$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)x + y = 0 \\ x + (a-2)y = 0 \end{cases} \rightarrow$ Penyelesaian kedua persamaan tersebut tidak hanya di (0, 0), artinya posisi kedua garis tersebut adalah harus *berimpit*.

\Leftrightarrow Syarat berimpit adalah:

$$\frac{a-2}{1} = \frac{1}{a-2} \rightarrow (a-2)^2 = 1$$

$$a^2 - 4a + 4 = 1$$

$$a^2 - 4a + 3 = 0$$

5. Jika garis $4x + 2y = 5$ tegak lurus pada garis $mx + (2m-1)y = 9$, maka nilai m adalah

- A. -4 D. 4
B. $-\frac{1}{4}$ E. 0
C. $\frac{1}{4}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow 4x + 2y = 5 &\rightarrow m_1 = -2 \\ mx + (2m-1)y = 9 &\rightarrow m_2 = \frac{m}{1-2m} \\ \Leftrightarrow \text{Karena } \perp &\rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1 \\ (-2) \cdot \left(\frac{m}{1-2m}\right) &= -1 \\ -2m &= 2m - 1 \\ m &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

6. Jika garis l dengan persamaan $y = (a - \sqrt{3})x$ tegak lurus pada garis yang memotong sumbu- x dengan sudut $\frac{\pi}{3}$, maka nilai a adalah

- A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ D. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
B. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Garis } l : y &= (a - \sqrt{3})x \\ \bullet m_1 &= (a - \sqrt{3}) \\ \bullet m_2 &= \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{Karena } \perp \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$(a - \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3}) = -1$$

$$\sqrt{3}a - 3 = -1$$

$$a = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

7. Persamaan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah kurva berbentuk dua garis yang
- sejajar
 - berimpit
 - berpotongan tetapi tidak tegak lurus
 - berpotongan tegak lurus
 - masing-masing sejajar sumbu koordinat

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1(x+2) + 2(y-1) \\ 2(x+2) - 1(y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan matriks di atas diperoleh:

- $x + 2y = 3 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$
- $2x - y = 1 \rightarrow m_2 = 2$

\Leftrightarrow Karena $m_1 \cdot m_2 = -1$, maka kedua garis lurus tersebut saling *tegak lurus*.

B. PERSAMAAN GARIS LURUS

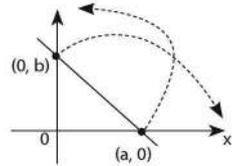
Rumus Persamaan Garis Lurus:

- Persamaan garis yang melalui titik $(0, 0)$ dan bergradien m adalah $y = mx$
- Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan bergradien m adalah $y - y_1 = m(x - x_1)$
- Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) adalah:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \text{ atau } (x_1 - x_2)y = (y_1 - y_2)x + (x_1y_2 - x_2y_1)$$

- Persamaan garis yang memotong sumbu X di $(a, 0)$ dan sumbu Y di $(0, b)$ adalah

$$bx + ay = ab$$



- Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan sejajar garis $cx + dy + f = 0$ adalah $cx + dy = c(x_1) + d(y_1)$
- Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan tegak lurus garis $cx + dy + f = 0$ adalah $dx - cy = d(x_1) - c(y_1)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

8. Garis yang melalui titik-titik A(3,1) dan B(9,3) dan garis yang melalui titik-titik C(6,0) dan D(0,2) akan berpotongan pada titik
- | | |
|----------|----------|
| A. (1,3) | D. (3,1) |
| B. (6,0) | E. (9,3) |
| C. (6,2) | |

Jawaban: D

- Pers garis yang melalui titik

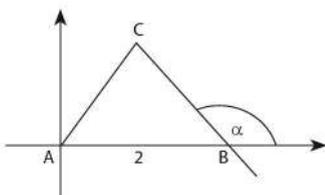
$$\left. \begin{matrix} (a,b) \\ (c,d) \end{matrix} \right\} \text{ adalah } (a - c)y = (b - d)x + (ad - bc)$$

- ⇔ Garis melalui (3,1) dan (9,3) → $3y = x$... (1)
- Garis melalui (6,0) dan (0,2) → $3y = -x + 6$... (2)
- ⇔ Substitusikan pers (1) ke pers (2) → $3y = -3y + 6$ → $y = 1$
- substitusikan $y = 1$ ke persamaan (1) → $x = 3$
- ⇔ Kedua garis berpotongan di titik (3,1)

9. Dari segi tiga sama sisi ABC, diketahui panjang sisinya adalah 2. Titik A berimpit dengan titik O (0,0), titik B pada sumbu x positif, dan titik C di kuadran pertama. Persamaan garis lurus yang melalui B dan C adalah

- A. $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}$
 B. $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$
 C. $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$
 D. $y = -\sqrt{3}x - \sqrt{3}$
 E. $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$

Jawaban: C



⇔ ΔABC segitiga sama sisi

- $\angle ABC = 60^\circ$
 $\alpha = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

⇔ Garis BC adalah garis yang melalui (2, 0) dengan gradien $m = \tan \alpha$
 $= \tan 120^\circ = -\sqrt{3}$ mempunyai persamaan

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = -\sqrt{3}(x - 2)$$

$$y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$$

10. Diketahui titik P(a, 2) terletak pada garis $l: 3x - 2y + 1 = 0$. Persamaan garis melalui P dan tegak lurus garis l adalah

- A. $2x + 3y - 8 = 0$
 B. $2x + 3y - 7 = 0$
 C. $2x + 3y + 2 = 0$
 D. $2x + 3y + 7 = 0$
 E. $2x + 3y + 8 = 0$

Jawaban: A

⇔ Titik P(a,2) pada garis $3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow 3a - 2(2) + 1 = 0 \rightarrow a = 1$

⇔ Gradien garis $l: 3x - 2y + 1 = 0 \rightarrow m_l = \frac{3}{2}$

⇔ Misal garis $k \perp l \rightarrow m_k \cdot m_l = -1 \rightarrow m_k = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \text{Persamaan garis yang melalui titik } P(1,2) \text{ dengan gradien } -\frac{2}{3}$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$2x + 3y - 8 = 0$$

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow \text{Persamaan garis yang melalui titik } (1,2) \text{ tegak lurus garis } 3x - 2y + 1 = 0 \text{ adalah } 2x + 3y = 2(1) + 3(2) \rightarrow 2x + 3y - 8 = 0$$

11. Garis lurus $y = ax + b$ memotong sumbu x di titik $x = 3$ dan membentuk sudut 30° terhadap sumbu x . Garis ini adalah

- | | |
|---|---|
| A. $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ | D. $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ |
| B. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}x - \sqrt{3}$ | E. $y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ |
| C. $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}x + \sqrt{3}$ | |

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow m = \tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

\Leftrightarrow Persamaan garisnya adalah:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}\sqrt{3}(x - 3) \rightarrow y = \frac{1}{3}\sqrt{3}x - \sqrt{3}$$

12. Garis $g: y = -2x + 3$ dan $h: y = 2x - 5$ berpotongan di titik A. Garis k melalui titik A dan sejajar dengan $l: y = 3x + 7$. Jika garis k memotong sumbu y di titik $(0, b)$, maka $b = \dots$

- | | |
|-------|------|
| A. -7 | D. 2 |
| B. -5 | E. 5 |
| C. -2 | |

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow y = -2x + 3$$

$$y = 2x - 5$$

$$\frac{\quad}{2y = -2} \rightarrow y = -1 \text{ dan } x = 2$$

Koordinat titik A (2,-1)

⇔ Karena sejajar (//) garis $y = 3x + 7 \rightarrow m_1 = m_2 = 3$

⇔ Persamaan garis melalui titik (2,-1) sejajar $y = 3x - 7$ adalah
 $y + 1 = 3(x-2) \rightarrow y = 3x - 7$ memotong sumbu $y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -7$

SOLUSI SMART!

⇔ Persamaan garis (k) melalui titik A(2, -1) sejajar $3x - y = 7$ adalah
 $3x - y = 3(2) - (-1) \rightarrow 3x - y = 7$ memotong sumbu
 $y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = -7$

13. Salah satu titik sudut persegi adalah (-4,5). Jika salah satu diagonalnya terletak pada garis $4x - y + 8 = 0$, maka persamaan garis diagonal yang lainnya

A. $x - 4y - 21 = 0$

D. $x + 4y - 6 = 0$

B. $x + 4y - 16 = 0$

E. $x - 4y + 21 = 0$

C. $x + 4y + 6 = 0$

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

⇔ Persamaan garis diagonal yang lain adalah garis yang melalui
melalui
(-4,5) \rightarrow garis $4x - y + 8 = 0$
 $x + 4y = (-4) + 4(5)$
 $x + 4y - 16 = 0$

14. Koordinat titik pada garis $y = 3x - 7$ yang terdekat dengan titik (1, 1) mempunyai absis

A. 0,5

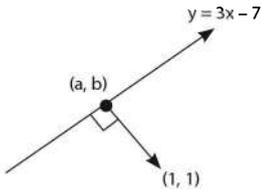
D. 2,0

B. 1,0

E. 2,5

C. 1,5

Jawaban: E



$$\Leftrightarrow \text{Garis } y = 3x - 7 \text{ melalui } (a, b) \rightarrow b = 3a - 7 \quad \dots (1)$$

$$\Leftrightarrow g_1: y = 3x - 7 \rightarrow m_1 = 3$$

$$g_2: \text{garis melalui } (1, 1) \text{ \& } (a, b) \rightarrow m_2 = \frac{1-b}{1-a}$$

$$g_1 \perp g_2 \rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

$$\rightarrow (3) \cdot \frac{1-b}{1-a} = -1$$

$$3 - 3b = -1 + a \quad \dots (2)$$

\Leftrightarrow Substitusi pers (1) ke pers (2)

$$3 - 3(3a - 7) = -1 + a$$

$$10a = 25 \rightarrow a = 2,5$$

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow \text{Garis melalui } (1, 1) \perp 3x - y - 7 = 0 \quad \dots (1)$$

$$\text{adalah } x + 3y = (1) + 3(1)$$

$$x + 3y - 4 = 0 \quad \dots (2)$$

\Leftrightarrow Absis titik potong garis persamaan (1) dan persamaan (2) adalah 2,5

C. JARAK

Beberapa Rumus Jarak:

- Jarak titik $A(x_A, y_A)$ ke titik $B(x_B, y_B)$ adalah:

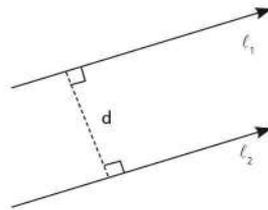
$$|AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

- Jarak titik (x_1, y_1) ke garis $Ax + By + C = 0$ adalah:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Jika ℓ_1 dan ℓ_2 sejajar dengan $\ell_1 \equiv Ax + By + C = 0$,
 $\ell_2 \equiv Ax + By + D = 0$, maka jarak ℓ_1 ke ℓ_2 adalah:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$



CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

15. Jika jarak dari $(0,0)$ ke garis $y = -\frac{3}{a}x + 3$ sama dengan setengah panjang potongan garis yang menghubungkan titik $(a,0)$ dan titik $(0,3)$, maka harga a sama dengan

- A. ± 1
- B. ± 2
- C. ± 3
- D. ± 4
- E. ± 5

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow y = -\frac{3}{a}x + 3 \rightarrow 3x + ay - 3a = 0$$

$$\Leftrightarrow d_1 = \text{jarak ttk } (0,0) \text{ ke garis } 3x + ay - 3a = 0$$

$$d_2 = \text{jarak titik } (a,0) \text{ ke } (0,3)$$

$$d_1 = \frac{1}{2} d_2$$

$$\frac{|3(0) + a(0) - 3a|}{\sqrt{(3)^2 + (a)^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{(a-0)^2 + (0-3)^2}$$

- dikuadratkan & dikali silang

$$36a^2 = (9 + a^2)(9 + a^2)$$

$$a^4 - 18a^2 + 81 = 0$$

$$(a^2 - 9)^2 = 0$$

$$a^2 = 9$$

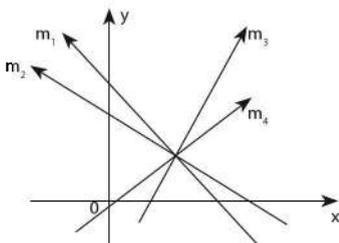
$$a = \pm 3$$

LATIHAN SOAL 4

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1.



Jika m_1 , m_2 , m_3 , dan m_4 adalah gradien garis pada gambar di atas, maka berlaku hubungan

- A. $m_1 < m_2 < m_3 < m_4$ D. $m_2 < m_1 < m_3 < m_4$
B. $m_1 < m_2 < m_4 < m_3$ E. $m_1 < m_2 < m_4 < m_3$
C. $m_2 < m_1 < m_4 < m_3$
2. Jika garis $g: a(x+y) + 2(x-y) = 0$ dan garis $h: (5y - x) + 3a(y-x) = 5$ saling tegak lurus, maka $a = \dots$
- A. $-\frac{3}{2}$ D. 1
B. -1 E. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{2}{3}$

3. Jika persamaan linier $a_1x + b_1y = c_1$ dan $a_2x + b_2y = c_2$ merupakan persamaan garis–garis lurus yang saling berpotongan tegak lurus, maka akan dipenuhi
- A. $a_1b_1 - a_2b_2 = 0$
 B. $a_1a_2 - b_1b_2 = 0$
 C. $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$
 D. $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$
 E. $a_1b_2 + a_2b_1 = 0$
4. Garis g melalui titik $(2,1)$ dan $(-1,3)$, sedangkan garis h melalui titik $(-1,1)$ dan $(4,k)$. Jika garis h tegak lurus g, maka konstanta $k = \dots$
- A. $2\frac{1}{2}$
 B. 3
 C. $4\frac{1}{2}$
 D. 6
 E. $8\frac{1}{2}$
5. Supaya sistem persamaan linier $2x + 3y = 6$; $(1+a)x - 6y = 7$ merupakan persamaan dua garis yang saling tegak lurus, maka $a = \dots$
- A. -10
 B. -5
 C. -3
 D. 8
 E. 12
6. Bila titik P $(3,-2)$ terletak pada garis $ax - y + 7 = 0$, maka a sama dengan
- A. $\frac{5}{3}$
 B. $-\frac{5}{35}$
 C. $\frac{7}{2}$
 D. 3
 E. -3
7. Jika penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} (a+3)x + y = 0 \\ x + (a+3)y = 0 \end{cases}$ tidak hanya $(x,y) = (0,0)$ saja, maka nilai $a^2 + 6a + 17 = \dots$
- A. 16
 B. 9
 C. 4
 D. 1
 E. 0

13. Persamaan garis lurus yang dinyatakan oleh $\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ mempunyai gradien
- A. 1
B. -1
C. 2
D. -2
E. $\frac{1}{2}$
14. Grafik hasil produksi suatu pabrik per tahun merupakan suatu garis lurus. Jika produksi pada tahun pertama 110 unit dan pada tahun ketiga 150 unit, maka produksi tahun ke-15 adalah
- A. 370
B. 390
C. 410
D. 430
E. 670
15. Garis $ax + 3y - 5 = 0$ dan $2x - by - 9 = 0$ diketahui berpotongan di titik $(2, -1)$. Nilai $a + b$ sama dengan
- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10

SOAL LATIHAN - 2

16. Garis g melalui titik $(1, -2)$ dan $(3, 1)$. Persamaan garis h yang melalui titik $(-1, 2)$ dan sejajar garis g adalah
- A. $2x + y = 0$
B. $3x + 2y - 1 = 0$
C. $2x - 3y + 8 = 0$
D. $2x - y + 4 = 0$
E. $3x - 2y + 7 = 0$
17. Persamaan garis lurus yang memotong tegak lurus garis $x - 3y - 5 = 0$ di titik $(2, -1)$ adalah
- A. $3x + y + 5 = 0$
B. $3x - y - 6 = 0$
C. $3x + y - 4 = 0$
D. $3x - y - 7 = 0$
E. $3x + y - 5 = 0$

23. Diketahui $\triangle ABC$ dengan titik B pada sumbu x dan titik C pada sumbu y. Jika $AB = AC = 10$ dan $A(-6, 0)$, maka persamaan garis BC adalah

A. $2y + x - 4 = 0$ D. $y + 2x - 8 = 0$
B. $2y + x + 4 = 0$ E. $y - 2x - 8 = 0$
C. $y + x - 4 = 0$

24. ABC adalah sebuah segitiga dengan titik sudut $A(1, 10)$, $B(5, 2)$ dan $C(9, 6)$. Persamaan garis tinggi AD adalah

A. $x - y + 11 = 0$ D. $x + y - 9 = 0$
B. $x + y - 11 = 0$ E. $2x - y + 8 = 0$
C. $x - y + 9 = 0$

25. Jika titik A merupakan titik perpotongan dua garis yang disajikan oleh persamaan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$ dengan garis l_1 adalah garis yang melalui titik A dan titik asal O, maka persamaan garis l_2 yang melalui titik B (2, 2) dan tegak lurus pada l_1 adalah

A. $y = 14 - 6x$ D. $y = 2(5 - 2x)$
B. $y = 12 - 5x$ E. $y = 2(2x - 3)$
C. $y = 2(3x - 5)$

26. Persamaan garis g dan h berturut-turut adalah $\det \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$ dan $\det \begin{pmatrix} x+y & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$. Garis g dan h berpotongan di titik A, titik B(p, 1) terletak pada g, dan titik C(2, q) terletak pada h. Persamaan garis k yang melalui A dan sejajar BC adalah

A. $y = 2x - 1\frac{1}{2}$ D. $y = -2x + \frac{1}{2}$
B. $y = 2x + \frac{1}{2}$ E. $y = -2x + 1\frac{1}{2}$
C. $y = -2x - 1\frac{1}{2}$

SOAL LATIHAN - 3

27. Titik–titik yang berjarak 5 satuan dari titik $(3, 2)$ dan berjarak 1 satuan dari garis $y = 7$ adalah
- A. $(7, -1)$ dan $(7, 5)$ D. $(0, 6)$ dan $(6, 6)$
B. $(8, 2)$ dan $(0, -2)$ E. $(-2, 2)$ dan $(8, 2)$
C. $(6, -2)$ dan $(6, 6)$
28. Garis–garis $x - 2y + 7 = 0$, $2x + 5y - 6 = 0$ dan sumbu x membentuk
- A. segitiga tumpul D. segitiga sama kaki
B. segitiga lancip E. segitiga sama sisi
C. segitiga siku–siku
29. Diketahui garis $g: 3x - 2y - 10 = 0$. Persamaan garis yang diperoleh dengan menggeser garis g tiga satuan ke atas dan dua satuan ke kiri adalah
- A. $3x - 2y - 22 = 0$ D. $3x - 2y - 2 = 0$
B. $3x - 2y + 2 = 0$ E. $3x - 2y + 22 = 0$
C. $3x - 2y - 10 = 0$
30. Persamaan garis lurus yang mempunyai gradien $-\frac{3}{4}$ dan membentuk segitiga dengan luas 24 cm^2 bersama sumbu koordinat di kuadran I adalah
- A. $y = -\frac{3}{4}x - 6$ D. $4y + 3x = 6$
B. $y = -\frac{3}{4}x + 6$ E. $3y + 4x = 6$
C. $y + 3x = 6$
31. Sisi persegi panjang ABCD sejajar dengan sumbu koordinat. Titik $A(1, -2)$ dan $C(5, 1)$ adalah titik sudut yang berhadapan. Diagonal BD terletak pada garis
- A. $4x + 3y - 7 = 0$ D. $3x + 4y - 7 = 0$
B. $-3x + 4y + 11 = 0$ E. $3x + 4y - 5 = 0$
C. $-4x + 3y + 11 = 0$



PERSAMAAN KUADRAT

5

A. BENTUK UMUM DAN AKAR PERSAMAAN KUADRAT

Bentuk umum persamaan kuadrat adalah $ax^2 + bx + c = 0$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

Nilai x yang memenuhi persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ disebut *akar-akar persamaan kuadrat*.

a. Akar Persamaan Kuadrat

Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan kuadrat, maka x_1 dan x_2 dapat diperoleh dengan cara:

1. Memfaktorkan

- $x^2 + bx + c = 0 \rightarrow (x+p)(x+q) = 0$ dengan $(p+q) = b$ dan $(p \cdot q) = c$
- $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \frac{(ax+p)(ax+q)}{a} = 0$ dengan $(p+q) = b$ dan $(p \cdot q) = ac$

2. Melengkapkan kuadrat sempurna

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{D}{4a^2} \text{ dengan } D = b^2 - 4ac$$

3. Rumus abc (Rumus Al-Khawarizmi)

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Dari rumus abc di atas, diperoleh hubungan:

- Penjumlahan akar-akarnya $\rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- Perkalian akar-akarnya $\rightarrow x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
- Selisih akar-akarnya $\rightarrow x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{D}}{a}$

b. Pengembangan Hubungan Akar-akar Persamaan Kuadrat

- $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$
- $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_2)^2 + (x_1)^2}{x_1 \cdot x_2}$
- $\frac{x_2}{x_1} - \frac{x_1}{x_2} = \frac{(x_2)^2 - (x_1)^2}{x_1 \cdot x_2}$
- $(x_1)^2 + (x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2$
- $(x_1)^2 - (x_2)^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$
- $(x_1)^3 + (x_2)^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)$
- $(x_1)^3 - (x_2)^3 = (x_1 - x_2)^3 + 3x_1x_2(x_1 - x_2)$
- $(x_1)^4 + (x_2)^4 = \{(x_1)^2 + (x_2)^2\}^2 - 2(x_1x_2)^2$
- $(x_1)^4 - (x_2)^4 = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 - x_2^2)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Jika salah satu akar persamaan $ax^2 + 5x - 12 = 0$ adalah 2, maka

- A. $a = \frac{1}{2}$, akar yang lain 12
- B. $a = \frac{1}{4}$, akar yang lain 12
- C. $a = \frac{1}{3}$, akar yang lain -12
- D. $a = \frac{2}{3}$, akar yang lain 10
- E. $a = \frac{1}{2}$, akar yang lain -12

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow x = 2 \rightarrow ax^2 + 5x - 12 = 0$$

$$4a + 10 - 12 = 0$$

$$4a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{2}$$

\Leftrightarrow untuk $a = \frac{1}{2}$, maka persamaan menjadi:

$$\frac{1}{2}x^2 + 5x - 12 = 0 \rightarrow \text{dikali } 2$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$(x+12)(x-2) = 0$$

\Leftrightarrow Akar yang lain selain 2 adalah -12

2. Jika 2 adalah satu-satunya akar persamaan kuadrat $\frac{1}{4}x^2 + bx + a = 0$, maka nilai $a+b$ adalah

- A. 32
- B. 2
- C. 0
- D. -2
- E. -32

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}x^2 + bx + a = 0 \rightarrow (\text{dikali } 4) \quad x^2 + 4bx + 4a = 0 \quad \dots(1)$$

⇔ Persamaan kuadrat yang akarnya 2 adalah:

$$(x-2)^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

...(2)

⇔ Persamaan (1) = (2), diperoleh:

- $4bx = -4x \rightarrow b = -1$

- $4a = 4 \rightarrow a = 1$

⇔ Jadi, $a + b = 1 - 1 = 0$

3.
$$\frac{2}{5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{\dots}}}} = \dots$$

A. $\frac{2}{11}$

D. $\frac{4}{11}$

B. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

Jawaban: E

⇔
$$5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{\dots}}} = x$$

$$5 + \frac{6}{x} = x \rightarrow \text{dikali } x$$

$$5x + 6 = x^2$$

$$x^2 - 5x - 6 = 0 \rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$$

Nilai x yang memenuhi adalah 6.

⇔
$$\frac{2}{5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{5 + \frac{6}{\dots}}}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

4. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + ax - 4 = 0$ adalah p dan q . Jika $p^2 - 2pq + q^2 = 8a$, maka nilai $a = \dots$
- A. -8 D. 6
 B. -4 E. 8
 C. 4

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x^2 + ax - 4 = 0 \rightarrow a = 1, b = a, c = -4$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 2pq + q^2 = 8a$$

$$(p - q)^2 = 8a$$

$$\left(\frac{\sqrt{D}}{a}\right)^2 = 8a$$

$$\frac{D}{(1)^2} = 8a \rightarrow D = 8a$$

$$(a)^2 - 4(1)(-4) = 8a$$

$$a^2 - 8a + 16 = 0$$

$$(a - 4)^2 = 0 \rightarrow a = 4$$

5. Jika kedua akar persamaan $x^2 - (2a + 3)x + 3a = 0$ berkebalikan, maka nilai $a = \dots$
- A. 1 D. $-\frac{3}{2}$
 B. $\frac{1}{3}$ E. -2
 C. $\frac{1}{4}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^2 - (2a + 3)x + 3a = 0$$

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 1$$

$$\frac{c}{a} = 1$$

$$a = c$$

$$1 = 3a \rightarrow a = \frac{1}{3}$$

6. Jika $(p + 1)$ dan $(p - 1)$ adalah akar-akar persamaan $x^2 - 4x + a = 0$, maka nilai a adalah

- A. 0
 B. 1
 C. 2
 D. 3
 E. 4

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + a = 0$$

- $(p+1) + (p-1) = -\frac{b}{a}$
 $2p = 4 \rightarrow p = 2$
- $(p+1)(p-1) = \frac{c}{a}$
 $(3)(1) = a \rightarrow a = 3$

7. Persamaan kuadrat $x^2 + ax - 2a^2 = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Jika $x_1 + 2x_2 = 1$, maka nilai a adalah

- A. $-\frac{1}{3}$
 B. $-\frac{1}{4}$
 C. $\frac{1}{4}$
 D. $\frac{1}{3}$
 E. $\frac{2}{3}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow x^2 + ax - 2a^2 = 0$$

- $x_1 + 2x_2 = 1$ (1)
- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -a$ (2)

Jika pers (1) - (2), maka diperoleh: $x_2 = 1 + a$

\Leftrightarrow substitusi $x_2 = 1 + a$ ke pers (1), maka

$$x_1 + 2(1+a) = 1 \rightarrow x_1 = -1 - 2a$$

$\Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 = -(1+2a)(1+a)$

$$-2a^2 = -2a^2 - 3a - 1 \rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

8. Persamaan kuadrat $x^2 - px + p = 0$, $p > 0$ mempunyai akar x_1 dan x_2 .
Jika $x_1^2 + x_2^2 = 48$, maka $p = \dots$

- A. 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 10

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^2 - px + p = 0 \rightarrow \begin{cases} \bullet x_1 + x_2 = p \\ \bullet x_1 \cdot x_2 = p \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 48 \\ (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 48 \\ p^2 - 2p = 48 \\ p^2 - 2p - 48 = 0 \\ (p-8)(p+6) = 0 \end{cases}$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 48$$

$$p^2 - 2p = 48$$

$$p^2 - 2p - 48 = 0$$

$$(p-8)(p+6) = 0$$

\Leftrightarrow Jadi, nilai p yang memenuhi adalah 8

9. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 1 = 0$, maka $\alpha^5 + \beta^5 = \dots$

- A. 3
B. 5
C. 6
D. 11
E. 13

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \bullet \alpha + \beta = 1 \\ \bullet \alpha \cdot \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha^2 - \alpha - 1 = 0 \\ \alpha^2 = \alpha + 1 \end{cases}$$

$$\alpha^4 = (\alpha + 1)^2$$

$$= \alpha^2 + 2\alpha + 1$$

$$= (\alpha + 1) + (2\alpha + 1) = 3\alpha + 2$$

$$\alpha^5 = \alpha(3\alpha + 2) = 3\alpha^2 + 2\alpha$$

$$\text{Analog} \rightarrow \beta^5 = 3\beta^2 + 2\beta$$

$$\Leftrightarrow \alpha^5 + \beta^5 = 3(\alpha^2 + \beta^2) + 2(\alpha + \beta)$$

$$= 3\{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta\} + 2(\alpha + \beta)$$

$$= 3\{(1)^2 - 2(-1)\} + 2(1) = 11$$

10. Jika α dan β akar-akar persamaan $x^2 - x - 3 = 0$, maka nilai dari $(\alpha^2 - \alpha - 6)(\beta^2 - \beta + 6)$ adalah

- A. -9
- B. -18
- C. -27
- D. 12
- E. 15

Jawaban: C

SOLUSI SMART!

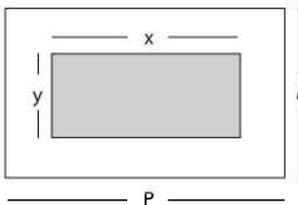
$$\Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0 \rightarrow \alpha^2 - \alpha - 3 = 0$$
$$\alpha^2 - \alpha = 3$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha^2 - \alpha - 6)}_3 \underbrace{(\beta^2 - \beta + 6)}_3$$
$$= (3 - 6)(3 + 6)$$
$$= (-3)(9) = -27$$

11. Suatu area berbentuk persegi panjang, di tengahnya terdapat kolam renang berbentuk persegi panjang yang luasnya 180 m^2 . Selisih panjang dan lebar kolam adalah 3 m . Di sekeliling kolam renang dibuat jalan selebar 2 m . Maka luas jalan tersebut adalah

- A. 24 m^2
- B. 54 m^2
- C. 68 m^2
- D. 108 m^2
- E. 124 m^2

Jawaban: E



$$x \cdot y = 180 \quad \dots(1)$$

$$x - y = 3 \rightarrow x = 3 + y \quad \dots(2)$$

substitusikan $x = (3 + y)$ ke pers (1)

$$(y+3).y = 180$$

$$y^2 + 3y - 180 = 0$$

$$(y+15)(y-12) = 0$$

Yang memenuhi $y = 12 \rightarrow x = 15$

$$\Leftrightarrow p = (x+4) = 19 \text{ m}$$

$$l = (y+4) = 16 \text{ m}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas jalan} = p/l - xy \\ = (19)(16) - (180) = 124 \text{ m}^2$$

B. JENIS AKAR PERSAMAAN KUADRAT

a. Jenis Akar-akar Persamaan Kuadrat

- $D \geq 0 \rightarrow$ akar-akarnya real/ nyata
- $D > 0 \rightarrow$ akar-akarnya real dan berlainan
- $D = 0 \rightarrow$ akar-akarnya real dan kembar
- $D < 0 \rightarrow$ akar-akarnya imajiner/ tidak real/ khayal

b. Sifat-sifat Akar Real Persamaan Kuadrat

- Kedua akarnya real positif $\rightarrow D \geq 0, x_1 + x_2 > 0, \text{ dan } x_1 \cdot x_2 > 0$
- Kedua akarnya real negatif $\rightarrow D \geq 0, x_1 + x_2 < 0, \text{ dan } x_1 \cdot x_2 > 0$
- Kedua akarnya real berlawanan $\rightarrow D > 0, x_1 + x_2 = 0, \text{ dan } x_1 \cdot x_2 < 0$
- Kedua akarnya real saling berkebalikan $\rightarrow D > 0 \text{ dan } x_1 \cdot x_2 = 1$
- Kedua akarnya real berlainan tanda $\rightarrow D > 0 \text{ dan } x_1 \cdot x_2 < 0$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

12. Agar persamaan kuadrat $x^2 + (p - 2)x + 4 = 0$ mempunyai akar kembar, maka nilai p adalah
- A. $p = -6$ atau $p = 4$
B. $p = -2$ atau $p = 6$
C. $p = -3$ atau $p = 4$
D. $p = -3$ atau $p = -4$
E. $p = 1$ atau $p = -122$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^2 + (p-2)x + 4 = 0$$

\Leftrightarrow Syarat mempunyai akar kembar:

$$D = 0 \rightarrow (p-2)^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$p^2 - 4p - 18 = 0$$

$$(p-6)(p+2) = 0$$

\Leftrightarrow Nilai p yang memenuhi: 6 dan -2

13. Persamaan kuadrat $x^2 + (m-2)x + 9 = 0$ mempunyai akar-akar nyata.

Nilai m yang memenuhi adalah

A. $-8 \leq m \leq 4$

D. $m \leq -8$ atau $m \geq 4$

B. $-4 \leq m \leq 8$

E. $m \leq -4$ atau $m \geq 8$

C. $m \leq -4$ atau $m \geq 10$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-2)x + 9 = 0$$

\Leftrightarrow Syarat mempunyai *akar-akar nyata*:

$$D \geq 0 \rightarrow (m-2)^2 - 4(1)(9) \geq 0$$

$$m^2 - 4m - 32 \geq 0$$

$$(m-8)(m+4) \geq 0$$



\Leftrightarrow Nilai m yang memenuhi adalah $m \leq -4$ atau $m \geq 8$

14. Jika persamaan kuadrat $x^2 - 2px + (p^2 - 4p) = 0$ mempunyai dua akar positif, maka konstanta p memenuhi

A. $p > 0$

D. $0 < p < 4$

B. $p > 4$

E. $-4 < p < 4$

C. $-4 < p < 0$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^2 - 2px + (p^2 - 4p) = 0$$

\Leftrightarrow Syarat mempunyai *dua akar positif*:

- $D \geq 0$

$$(-2p)^2 - 4(1)(p^2 - 4p) \geq 0$$

$$16p \geq 0 \rightarrow p \geq 0$$

...(1)

- $x_1 + x_2 > 0$
 $(p^2 - 4p) > 0$... (2)

- $x_1 \cdot x_2 > 0$
 $(p^2 - 4p) > 0$
 $p(p-4) > 0$
 $p < 0$ atau $p > 4$... (3)

⇔ Irisan dari (1), (2), dan (3) adalah $p > 4$

15. Jika α dan β merupakan akar-akar real persamaan $x^2 + x = \frac{2}{x^2 + x + 1}$, maka nilai $\alpha\beta$ adalah

- A. 2 atau -1
- B. -2 atau 1
- C. -2 atau -1
- D. -2
- E. -1

Jawaban: E

⇔ Misal: $(x^2 + x) = p$,

$$p = \frac{2}{p+1} \rightarrow p(p+1) = 2$$

$$p^2 + p - 2 = 0$$

$$(p+2) \cdot (p-1) = 0$$

⇔ Untuk $p = 1 \rightarrow x^2 + x = 1$
 $x^2 + x - 1 = 0$
 $\alpha \cdot \beta = -1$

D > 0 → *akarnya real*

Untuk $p = -2 \rightarrow x^2 + x = -2$
 $x^2 + x + 2 = 0$
 $\alpha \cdot \beta = 2$

D < 0 → *akarnya tidak real*

16. Persamaan $x^2 + ax + (a-1) = 0$ mempunyai akar-akar $x_1 > 1$ dan $x_2 < 1$. Nilai a yang memenuhi adalah

- A. $a > 0$
- B. $a < 0$
- C. $a \neq -2$
- D. $a > -2$
- E. $-2 < a < 0$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^2 + ax + (a - 1) = 0$$

$$\bullet \quad x_1 + x_2 = -a \text{ dan } \bullet \quad x_1 \cdot x_2 = (a - 1)$$

$$\Leftrightarrow x_1 > 1 \rightarrow (x_1 - 1) > 0$$

$$x_2 < 1 \rightarrow (x_2 - 1) < 0$$

$$\bullet \quad (x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$$

$$x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) + 1 < 0$$

$$(a - 1) - (-a) + 1 < 0$$

$$2a < 0$$

$$a < 0$$

...(1)

$$\bullet \quad D > 0$$

$$(a)^2 - 4(1)(a - 1) > 0$$

$$a^2 - 4a + 4 > 0$$

$$(a - 2)^2 > 0$$

$$a \in \text{real dan } a \neq 2$$

...(2)

\Leftrightarrow Nilai a yang memenuhi adalah irisan (1) dan (2) adalah $a < 0$

C. PERSAMAAN KUADRAT BARU

a. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya x_1 dan x_2 adalah:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0 \quad \text{atau} \quad x^2 - (x_1 + x_2)x + (x_1 \cdot x_2) = 0$$

b. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$, maka penyusunan persamaan kuadrat (PK) barunya bisa digunakan cara sebagai berikut.

Akar PK baru	Persamaan kuadrat baru
$(x_1 - n)$ dan $(x_2 - n)$	$a(x + n)^2 + b(x + n) + c = 0$
$(x_1 + n)$ dan $(x_2 + n)$	$a(x - n)^2 + b(x - n) + c = 0$
$\left(\frac{x_1}{n}\right)$ dan $\left(\frac{x_2}{n}\right)$	$a(n \cdot x)^2 + b(n \cdot x) + c = 0$
$(n \cdot x_1)$ dan $(n \cdot x_2)$	$a\left(\frac{x}{n}\right)^2 + b\left(\frac{x}{n}\right) + c = 0$

$$\frac{1}{x_1} \text{ dan } \frac{1}{x_2}$$

$$cx^2 + bx + a = 0$$

$$x_1^2 \text{ dan } x_2^2$$

$$a^2 x^2 - (b^2 - 2ac)x + c^2 = 0$$

$$\frac{x_1}{x_2} \text{ dan } \frac{x_2}{x_1}$$

$$acx^2 - (b^2 - 2ac)x + ac = 0$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

17. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 5 dan -2 adalah

A. $x^2 + 7x + 10 = 0$

D. $x^2 + 3x - 10 = 0$

B. $x^2 - 7x + 10 = 0$

E. $x^2 - 3x - 10 = 0$

C. $x^2 + 3x + 10 = 0$

Jawaban: E

⇔ Misal: $y_1 = 5$ dan $y_2 = -2$

- $(y_1 + y_2) = 3$ dan

- $(y_1 \cdot y_2) = -10$

⇔ Persamaan baru yang akar-akarnya y_1 dan y_2 adalah:

$$x^2 - (y_1 + y_2)x + (y_1 \cdot y_2) = 0$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

18. Diketahui akar-akar persamaan kuadrat $2x^2 - 4x + 1 = 0$ adalah α dan

β . Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $\frac{\alpha}{\beta}$ dan $\frac{\beta}{\alpha}$ adalah

A. $x^2 - 6x + 1 = 0$

D. $x^2 + 6x - 1 = 0$

B. $x^2 + 6x + 1 = 0$

E. $x^2 - 8x - 1 = 0$

C. $x^2 - 3x + 1 = 0$

Jawaban: A

⇔ $2x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 2$

$$\alpha \cdot \beta = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jika } y_1 = \frac{\alpha}{\beta} \text{ dan } y_2 = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\begin{aligned} \bullet (y_1 + y_2) &= \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \\ &= \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha \cdot \beta} \\ &= \frac{(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha \cdot \beta} \\ &= \frac{(2)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 6 \end{aligned}$$

$$\bullet (y_1 \cdot y_2) = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\beta}{\alpha} = 1$$

\Leftrightarrow Persamaan kuadrat yang akar-akarnya y_1 dan y_2 adalah:

$$\begin{aligned} x^2 - (y_1 + y_2)x + (y_1 \cdot y_2) &= 0 \\ x^2 - 6x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

19. Jika x_1 dan x_2 akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x + a = 0$, maka persamaan kuadrat yang akarnya $t_1 = x_1^2 + x_2^2$ dan $t_2 = x_1 + x_2$ adalah

- A. $t^2 + (2a-4)t + a = 0$ D. $t^2 + (4a-8)t + 2a - 6 = 0$
 B. $t^2 - 2t + 4 - 2a = 0$ E. $t^2 - (2a-6)t - 4a + 8 = 0$
 C. $t^2 + (2a-6)t - 4a + 8 = 0$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + a = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 2$$

$$x_1 \cdot x_2 = a$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow t_1 &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) \\ &= 4 - 2a \end{aligned}$$

$$t_2 = x_1 + x_2 = 2$$

\Leftrightarrow Persamaan kuadrat yang akar-akarnya t_1 dan t_2 adalah:

$$x^2 - (t_1 + t_2)x + (t_1 \cdot t_2) = 0$$

$$t^2 + (2a-6)t - 4a + 8 = 0$$

20. Akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah α dan β .
 Persamaan kuadrat baru yan gakar-akarnya $(\alpha+2)$ dan $(\beta+2)$ adalah

....

A. $3x^2 - 24x + 38 = 0$

D. $3x^2 - 24x + 24 = 0$

B. $3x^2 + 24x + 38 = 0$

E. $3x^2 - 24x - 24 = 0$

C. $3x^2 - 24x - 38 = 0$

Pembahasan: A

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 2 = 0 \rightarrow \bullet \alpha + \beta = -\left(-\frac{12}{3}\right) = 4$$

$$\bullet \alpha \cdot \beta = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Misal: } y_1 = (\alpha+2) \text{ dan } y_2 = (\beta+2)$$

$$\begin{aligned} \bullet y_1 + y_2 &= (\alpha+2) + (\beta+2) \\ &= (\alpha+\beta) + 4 \\ &= (4) + 4 = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet y_1 \cdot y_2 &= (\alpha+2) \cdot (\beta+2) \\ &= (\alpha\beta) + 2(\alpha+\beta) + 4 \\ &= \left(\frac{2}{3}\right) + 2(4) + 4 \\ &= 12\frac{2}{3} = \frac{38}{3} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya y_1 dan y_2 adalah:

$$x^2 - (y_1 + y_2)x + (y_1 y_2) = 0$$

$$x^2 - 8x + \frac{38}{3} = 0$$

$$3x^2 - 24x + 38 = 0$$

SOLUSI SMART!

- Gunakan invers (kebalikan) dari akar persamaan yang diketahui.
 - Invers bentuk $(\alpha + 2) = (x + 2)$ adalah $(x - 2)$
- \Leftrightarrow Persamaan kuadrat barunya dapat diperoleh dengan cara mengganti semua x dengan $(x - 2)$, maka:

$$\begin{aligned}3(x-2)^2 - 12(x-2) + 2 &= 0 \\3(x^2 - 4x + 4) - 12(x-2) + 2 &= 0 \\3x^2 - 24x + 38 &= 0\end{aligned}$$

21. Jika x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 - x + 2 = 0$, persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya $2x_1 - 2$ dan $2x_2 - 2$ adalah

- A. $8x^2 + 2x + 1 = 0$ D. $x^2 - 8x - 2 = 0$
B. $x^2 + 8x + 2 = 0$ E. $x^2 - 2x + 8 = 0$
C. $x^2 + 2x + 8 = 0$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 0 \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 2 \\x_1 + x_2 = 1$$

\Leftrightarrow Jika α dan β akar-akar persamaan kuadrat baru, maka:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= (2x_1 - 2) + (2x_2 - 2) \\&= 2(x_1 + x_2) - 4 = 2(1) - 4 = -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \beta &= (2x_1 - 2) \cdot (2x_2 - 2) \\&= 4(x_1 \cdot x_2) - 4(x_1 + x_2) + 4 \\&= 4(2) - 4(1) + 4 = 8\end{aligned}$$

\Leftrightarrow Persamaan kuadrat baru yang akar-akarnya α dan β adalah:

$$\begin{aligned}x^2 - (\alpha + \beta)x + (\alpha\beta) &= 0 \\x^2 - (-2)x + 8 &= 0 \\x^2 + 2x + 8 &= 0\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

- Gunakan kebalikan (invers) akar-akar persamaan yang diketahui
- $y = 2x - 2 \rightarrow x = \frac{y+2}{2}$

\Leftrightarrow Persamaan kuadrat barunya adalah:

$$\begin{aligned}\left(\frac{y+2}{2}\right)^2 - \left(\frac{y+2}{2}\right) + 2 &= 0 \rightarrow \text{dikali 4} \\y^2 + 2y + 8 &= 0 \rightarrow x^2 + 2x + 8 = 0\end{aligned}$$

22. Persamaan kuadrat yang masing-masing akarnya tiga kali akar persamaan kuadrat $x^2 + px + q = 0$ adalah

- A. $2x^2 + 3px + 9q = 0$ D. $x^2 + 3px - 9q = 0$
 B. $2x^2 - 3px + 18q = 0$ E. $x^2 + 3px + 9q = 0$
 C. $x^2 - 3px + 9q = 0$

Jawaban: E

SOLUSI SMART!

- Gunakan invers akar yang diketahui.

⇔ Persamaan yang baru adalah:

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + p\left(\frac{x}{3}\right) + q = 0 \rightarrow \text{dikali } 9$$

$$x^2 + 3px + 9q = 0$$

23. Jika p dan q akar-akar persamaan kuadrat $3x^2 + 6x + 4 = 0$, maka persamaan kuadrat yang mempunyai akar-akar $(2p+q+1)$ dan $(p+2q+1)$ adalah

- A. $x^2 + 4x + 3 = 0$ D. $x^2 - 8x + 19 = 0$
 B. $x^2 + 4x + 7 = 0$ E. $3x^2 - 24x + 49 = 0$
 C. $3x^2 + 12x + 13 = 0$

Jawaban: C

⇔ $3x^2 + 6x + 4 = 0$

- $p + q = -2$

⇔ $y_1 = (2p + q + 1)$
 $= (p + q) + p + 1$
 $= -2 + p + 1 = (p - 1)$

⇔ Dengan cara sama diperoleh $y_2 = (q - 1)$

- $y_1 + y_2 = (p + q) - 2 = -4$

- $y_1 \cdot y_2 = (p - 1)(q - 1)$
 $= pq - (p + q) + 1$
 $= \frac{4}{3} - (-2) + 1 = \frac{13}{3}$

⇔ Persamaan kuadrat yang akar-akarnya y_1 dan y_2 adalah:

$$x^2 - (y_1 + y_2)x + (y_1 y_2) = 0$$

$$x^2 - (-4)x + \frac{13}{3} = 0$$

$$3x^2 + 12x + 13 = 0$$

SOLUSI SMART!

⇔ Invers: $(p-1) \rightarrow (p+1) \rightarrow (x+1)$

⇔ Persamaan kuadrat barunya adalah

$$3(x+1)^2 + 6(x+1) + 4 = 0$$

$$3x^2 + 12x + 13 = 0$$

LATIHAN SOAL 5

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika salah satu akar persamaan $\frac{x}{6} - \frac{k}{x} = \frac{1}{2}$ adalah -6 , maka akar yang lain adalah
A. 6
B. 9
C. -9
D. 3
E. -3
2. Agar akar-akar x_1 dan x_2 dari persamaan kuadrat $2x^2 + 8x + m = 0$ memenuhi $7x_1 - x_2 = 20$ haruslah $m = \dots$
A. -24
B. -12
C. 12
D. 18
E. 20
3. Persamaan $3x^2 - (2m - 8)x - 2 = 0$, mempunyai akar-akar real berlawanan. Nilai m adalah
A. -4
B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{4}$
D. 4
E. 6

9. Diberikan persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Satu akarnya merupakan kelipatan 4 akar yang lain. Maka a , b , dan c memenuhi hubungan
- A. $b = 4a^2c$ D. $4b^2 = 9ac$
 B. $b = 16ac$ E. $4b^2 = 25ac$
 C. $b^2 = 8ac$
10. Jika akar-akar $x^2 + px + \frac{1}{3q} = 0$ merupakan kebalikan akar-akar $x^2 + 2qx - p + 2 = 0$, maka $\frac{p}{q} = \dots$
- A. $\frac{2}{3}$ D. 3
 B. $\frac{4}{9}$ E. $\frac{3}{4}$
 C. $\frac{3}{2}$
11. Jika jumlah kuadrat akar-akar persamaan $x^2 - 3x + n = 0$ sama dengan jumlah pangkat tiga akar-akar persamaan $x^2 + x - n = 0$, maka nilai n adalah
- A. 8 D. -8
 B. 6 E. -10
 C. -2
12. Diketahui x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $2x^2 + 6x + a = 0$. Jika $\frac{x_1 + 1}{x_2} + \frac{x_2 + 1}{x_1} < -2$, maka nilai a yang memenuhi adalah
- A. $a < 0$ D. $a > 3$
 B. $a > 0$ E. $a > 12$
 C. $a < 3$
13. Jika jumlah kuadrat akar-akar real persamaan $x^2 - x - p = 0$ sama dengan kuadrat jumlah kebalikan akar-akar persamaan $x^2 - px - 1 = 0$ maka $p = \dots$
- A. $\sqrt{2} + 1$ D. $\sqrt{3} - 1$ atau $\sqrt{3} + 1$
 B. $\sqrt{2} - 1$ E. $2 - \sqrt{2}$ atau $2 + \sqrt{2}$
 C. $\sqrt{2} + 1$ atau $-\sqrt{2} + 1$

14. Persamaan kuadrat $x^2 + (p+1)x + 2 = 0$ mempunyai akar real x_1 dan x_2 . Jika persamaan kuadrat $x^2 + (p-1)x + 6 = 0$ mempunyai akar x_2 dan x_3 , maka $x_1 + x_2 + x_3 = \dots$
- A. 0
B. 2
C. 4
D. 6
E. 8
15. Persamaan kuadrat $x^2 + (a-1)x - (a-5) = 0$ mempunyai akar x_1 dan x_2 . Jika $a > 0$ dan $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = 12$, maka konstanta $a = \dots$
- A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9
16. Jika α dan β merupakan akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - 2x - 5 = 0$, maka nilai dari $\alpha^4 - 28\alpha = \dots$
- A. 45
B. 40
C. 35
D. 25
E. 20
17. Jika sisi terpendek dari segitiga sama kaki ditambah 11 cm, maka hasil perubahan tersebut berupa segitiga samasisi. Sedangkan jika sisi terpendek dikurangi 4 cm, maka segitiga tersebut memiliki keliling 60 cm. Luas segitiga samakaki tersebut adalah \dots
- A. 75 cm^2
B. 84 cm^2
C. 154 cm^2
D. 168 cm^2
E. 192 cm^2
18. Irfan mempunyai seng dengan panjang 80 cm dan lebar 60 cm. Ia ingin mengecilkan seng tersebut dengan memotong panjang dan lebarnya sama besar sehingga luasnya menjadi setengah luas mula-mula. Berapa cm panjang dan lebar seng yang harus dipotong?
- A. 10 cm
B. 20 cm
C. 25 cm
D. 30 cm
E. 40 cm

19. Sebidang tanah berbentuk persegi panjang dengan luas 180 m^2 . Jika perbandingan panjang dan lebarnya sama dengan 5 berbanding 4, maka panjang diagonal bidang tanah tersebut adalah
- A. 9 m
B. $3\sqrt{41}$ m
C. $6\sqrt{41}$ m
D. $9\sqrt{41}$ m
E. 81 m
20. Dua buah mobil menempuh jarak 450 km. Kecepatan mobil kedua setiap jamnya 15 km lebih daripada kecepatan mobil kedua 1 jam lebih pendek dari waktu perjalanan mobil pertama, maka selisih kecepatan kedua mobil tersebut adalah
- A. 10 km/jam
B. 15 km/jam
C. 20 km/jam
D. 25 km/jam
E. 30 km/jam

SOAL LATIHAN - 1

21. Jika persamaan $18x^2 - 3px + p = 0$ mempunyai akar kembar, maka banyak himpunan bagian dari himpunan penyelesaian adalah
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4
22. Nilai k yang memenuhi agar persamaan $(1 - k)x^2 + 4x - 1 = 0$ mempunyai dua akar yang sama adalah
- A. -5
B. -3
C. -1
D. 5
E. 6
23. $x^2 + (2a - 1)x + (a^2 - 3a - 4) = 0$ akan mempunyai akar-akar yang real jika nilai a memenuhi
- A. $a \geq 1\frac{5}{8}$
B. $a \geq 2\frac{5}{8}$
C. $a \geq -2\frac{1}{8}$
D. $a \geq 2\frac{5}{8}$
E. $a \leq -2\frac{1}{8}$

24. Persamaan $\frac{x^2 - 3x + 3}{x - 2} = k$ mempunyai akar-akar nyata. Nilai k adalah
- A. $k \leq -3$ atau $k \geq 1$ D. $-1 \leq k \leq 3$
 B. $k \leq -1$ atau $k \geq 3$ E. $-1 < k < 3$
 C. $-3 \leq k \leq 1$
25. Persamaan kuadrat $x^2 + (m - 2)x + (2m - 4) = 0$ mempunyai akar-akar real, maka batas nilai m yang memenuhi adalah
- A. $m \leq 2$ atau $m \geq 10$ D. $2 < m < 10$
 B. $m \leq -10$ atau $m \geq -2$ E. $-10 < m \leq -2$
 C. $m < 2$ atau $m > 10$
26. Persamaan kuadrat $x^2 - (2 + 2m)x + (3m + 3) = 0$ mempunyai akar-akar *tidak real*. Batas-batas nilai m yang memenuhi adalah
- A. $m \leq -1$ atau $m \geq 2$ D. $-1 < m < 2$
 B. $m < -1$ atau $m > 2$ E. $-2 < m < 1$
 C. $m < -2$ atau $m > 1$
27. Jika dalam persamaan $cx^2 + bx - c = 0$ diketahui $c > 0$, maka kedua akar persamaan ini
- A. positif dan berlainan D. berlainan tanda
 B. negatif dan berlainan E. tidak real
 C. berlawanan
28. Diketahui persamaan $2x^2 - 4x + a = 0$ dengan a bilangan real. Supaya di dapat 2 akar berlainan yang positif, maka haruslah
- A. $a > 0$ D. $0 < a < 4$
 B. $a < 2$ E. $2 \leq a < 4$
 C. $0 < a < 2$
29. Dalam persamaan kuadrat $2x^2 - (a + 1)x + (a + 3) = 0$, a konstan, jika selisih kedua akarnya sama dengan 1, maka kuadrat jumlah akar-akarnya adalah
- A. 1 atau 25 D. 9 atau 81
 B. 1 atau 5 E. 5 atau 25
 C. 3 atau 9

30. Persamaan kuadrat $x^2 + 2x + (c + 2) = 0$ mempunyai akar-akar x_1 dan x_2 . Jika $x_1 > 1$ dan $x_2 < 1$, maka
- A. $c < -1$ D. $-5 < c < -1$
 B. $c < -5$ E. $c < -3$ atau $c > -1$
 C. $c > -5$
31. Supaya kedua akar persamaan $px^2 + qx + (1 - p) = 0$ real dan yang satu kebalikan dari yang lain, haruslah
- A. $q = 0$ D. $q^2 - 4p^2 - 4p > 0$
 B. $p < 0$ atau $p > 1$ E. $\frac{p}{(p-1)} = 1$
 C. $q < -1$ atau $q > 1$
32. Agar persamaan $(m+1)x^4 - 2mx^2 + (m-5) = 0$ mempunyai empat akar real yang berbeda, maka m harus memenuhi
- A. $m > -1\frac{1}{4}$ D. $-1\frac{1}{4} < m < -1$ atau $m > 0$
 B. $m < -1$ atau $m > 5$ E. $m < -1$
 C. $-1\frac{1}{4} < m < -1$ atau $m > 5$

SOAL LATIHAN - 3

33. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua lebih besar dari akar-akar persamaan $3x^2 - 12x + 2 = 0$ adalah
- A. $3x^2 - 24x + 38 = 0$ D. $3x^2 - 24x + 24 = 0$
 B. $3x^2 + 24x + 38 = 0$ E. $3x^2 - 24x - 24 = 0$
 C. $3x^2 - 24x - 38 = 0$
34. Bila akar-akar persamaan $y^2 - 2y + a = 0$ ternyata 3 lebih besar dari pada akar-akar persamaan $x^2 - bx - 32 = 0$, maka $a + b = \dots$
- A. -9 D. 23
 B. 11 E. -7
 C. -39

35. Jika p dan q akar-akar persamaan $3x^2 - 2x - 5 = 0$, maka persamaan yang akar-akarnya adalah $(p + 2)$ dan $(q + 2)$ adalah
- A. $3x^2 - 11x + 14 = 0$ D. $x^2 + 9x + 14 = 0$
 B. $3x^2 - 14x + 11 = 0$ E. $x^2 - 9x + 14 = 0$
 C. $x^2 - 14x + 11 = 0$
36. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya dua kali dari akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + 8x + 10 = 0$ adalah
- A. $x^2 + 16x + 20 = 0$ D. $x^2 + 16x + 120 = 0$
 B. $x^2 + 16x + 40 = 0$ E. $x^2 + 16x + 160 = 0$
 C. $x^2 + 16x + 80 = 0$
37. Jika salah satu akar persamaan kuadrat $x^2 - 3x - 2p = 0$ tiga lebih besar dari salah satu akar $x^2 - 3x + p = 0$, maka bilangan asli p sama dengan
- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3
38. Jika akar-akar persamaan $x^2 + 5x + a = 0$ dua kali akar-akar persamaan $2x^2 + bx - 3 = 0$, maka nilai $a + b$ sama dengan
- A. 2 D. -2
 B. 1 E. -3
 C. -1
39. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + bx - 50 = 0$ adalah satu lebih kecil dari tiga kali akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + x + a = 0$. Persamaan kuadrat yang akar-akarnya a dan b adalah
- A. $x^2 - x - 30 = 0$ D. $x^2 + 5x - 6 = 0$
 B. $x^2 + x - 30 = 0$ E. $x^2 - 6x + 5 = 0$
 C. $x^2 - 5x - 6 = 0$

40. Jika a dan b adalah akar-akar persamaan $2x^2 + 3x - 2 = 0$, maka persamaan kuadrat yang mempunyai akar-akar $\frac{a}{b}$ dan $\frac{b}{a}$ adalah
- A. $4x^2 + x + 1 = 0$ D. $x^2 + 4x + 1 = 0$
B. $4x^2 + 15x + 1 = 0$ E. $4x^2 + 17x + 4 = 0$
C. $4x^2 + 17x + 1 = 0$
41. Akar-akar persamaan kuadrat $x^2 + bx + c = 0$ adalah x_1 dan x_2 . Persamaan kuadrat dengan akar-akar $(x_1 + x_2)$ dan $(x_1 - x_2)$ adalah
- A. $x^2 + bcx + b - c = 0$ D. $x^2 + (b - c)x - bc = 0$
B. $x^2 - bcx - b + c = 0$ E. $x^2 - (b - c)x + bc = 0$
C. $x^2 + (b - c)x + bc = 0$
42. Akar-akar persamaan $2x^2 + ax - 3 = 0$ diketahui saling berkebalikan dengan akar-akar persamaan $3x^2 - 5x + 2b = 0$. Nilai $a.b = \dots$
- A. -10 D. 5
B. -5 E. 10
C. 2
43. Jika α dan β adalah akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - x - 3 = 0$, maka persamaan kuadrat yang akar-akarnya $(\alpha^2 - 2\alpha + 2)$ dan $(\beta^2 - 2\beta + 2)$ adalah
- A. $x^2 - 2x - 17 = 0$ D. $x^2 - 9x + 17 = 0$
B. $x^2 - 3x + 13 = 0$ E. $x^2 + 7x + 19 = 0$
C. $x^2 + 4x - 16 = 0$



FUNGSI KUADRAT

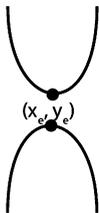
6

A. BENTUK UMUM DAN SIFAT PARABOLA

Bentuk umum fungsi kuadrat adalah $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ dengan $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $a \neq 0$.

Bentuk kurva fungsi kuadrat $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ adalah **parabola**.

Sifat umum parabola:



- $a > 0 \rightarrow$ parabola **terbuka ke atas**
- \rightarrow jenis nilai **ekstrem** adalah **minimum**
- $a < 0 \rightarrow$ parabola **terbuka ke bawah**
- \rightarrow jenis nilai **ekstrem** adalah **maksimum**

- Koordinat **titik puncak/titik ekstrem/titik stasioner/titik balik** parabola adalah

$$(x_e, y_e) \text{ dengan } \rightarrow x_e = -\frac{b}{2a} = \text{absis titik puncak} = \text{sumbu}$$

simetri parabola.

$$\rightarrow y_e = -\frac{D}{4a} = \text{nilai ekstrem/nilai stasioner/}$$

nilai balik/nilai puncak, dengan D (diskriminan) $= (b^2 - 4ac)$.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Koordinat titik balik grafik fungsi dengan rumus $f(x) = 3 - 2x - x^2$ adalah

- A. (-2,3) D. (1,-4)
B. (-1,4) E. (1,4)
C. (-1,6)

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow f(x) = 3 - 2x - x^2 \rightarrow a=-1, b = -2, c = 3$$

$$\Leftrightarrow \text{Titik balik kurvanya} = (x_e, y_e)$$

$$\bullet x_e = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-2)}{2(-1)} = -1$$

$$\bullet y_e = -\frac{D}{4a} = f(x_e)$$
$$= f(-1)$$
$$= 3 - 2(-1) - (-1)^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, titik baliknya} = (-1, 4)$$

2. Jika grafik fungsi $y = x^2 + ax + b$ mempunyai titik puncak (1,2), maka nilai a dan b adalah

- A. $a = 1, b = 3$ D. $a = 0,5, b = 1,5$
B. $a = -1, b = -3$ E. $a = 0,5, b = -1,5$
C. $a = -2, b = 3$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow y = x^2 + ax + b$$

$$\bullet x_e = -\frac{b}{2a} \rightarrow 1 = -\frac{a}{2} \rightarrow a = -2$$

$$\bullet y_e = f(1) \rightarrow 2 = (1)2 - 2(1) + b$$
$$b = 3$$

3. Laba x potong roti dinyatakan oleh fungsi $L(x) = 120x - 12x^2$ (dalam ratusan rupiah). Laba maksimum yang diperoleh adalah

- A. Rp 5.000,00
- B. Rp 30.000,00
- C. Rp 50.000,00
- D. Rp 60.000,00
- E. Rp 300.000,00

Jawaban: B

⇔ $L(x) = 120x - 12x^2$

⇔ Laba maksimum adalah

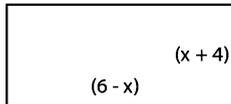
$$= -\frac{D}{4a}$$

$$= -\left(\frac{120^2 - 4(-12)(0)}{4(-12)}\right) = 30.000$$

⇔ Laba maksimum yang diperoleh adalah Rp 30.000,00

4. Luas maksimum dari bangun di bawah ini adalah

- A. 12 satuan
- B. 15 satuan
- C. 18 satuan
- D. 23 satuan
- E. 25 satuan



Jawaban: E

⇔ Luas = p . l

$$L(x) = (6-x)(x+4)$$

$$L(x) = -x^2 + 2x + 24$$

⇔ Luas maksimum adalah

$$= -\frac{D}{4a} = -\left(\frac{2^2 - 4(-1)(24)}{4(-1)}\right) = 25 \text{ satuan luas}$$

5. Sebuah roket ditembakkan vertikal ke atas, mencapai tinggi h meter setelah t detik, dirumuskan dengan $h(t) = 400t - 5t^2$. Tinggi maksimum roket itu

- A. 8000 meter
- B. 1200 meter
- C. 1800 meter
- D. 24000 meter
- E. 36000 meter

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow h(t) = 400t - 5t^2$$

$$\Leftrightarrow a = -5, b = 400 \text{ dan } c = 0$$

\Leftrightarrow Tinggi maksimum roket adalah

$$\begin{aligned} h_e &= -\frac{D}{4a} \\ &= -\left(\frac{(400)^2 - 4(-5)(0)}{4(-5)}\right) \\ &= 8000 \text{ meter} \end{aligned}$$

6. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $2x^2 - (2k-1)x + (2k^2 - 4) = 0$, maka nilai terbesar $x_1^2 + x_2^2$ adalah

A. $\frac{3}{2}$

D. 5

B. 2

E. 6

C. $\frac{9}{2}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(k) &= x_1^2 + x_2^2 \\ &= (x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) \\ &= \left(\frac{2k-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{2k^2-4}{2}\right) \\ &= \frac{4k^2 - 4k + 1}{4} - 2k^2 + 4 \\ &= -k^2 - k + \frac{17}{4} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Nilai terbesarnya adalah

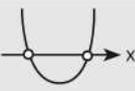
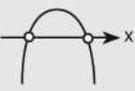
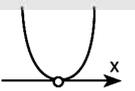
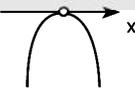
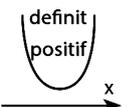
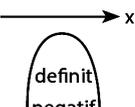
$$y_e = -\frac{D}{4a} = \frac{(-1)^2 - 4(-1) \cdot \left(\frac{17}{4}\right)}{-4} = \frac{9}{2}$$

B. PARABOLA

a. Hubungan Parabola dengan Sumbu-sumbu Koordinat

- Parabola memotong sumbu y ketika $x = 0$ dan memotong sumbu x ketika $y = 0$
- $D > 0 \rightarrow$ parabola memotong sumbu x di 2 titik
 $D = 0 \rightarrow$ parabola memotong sumbu x di 1 titik (menyinggung sumbu x)
 $D < 0 \rightarrow$ parabola tidak memotong sumbu x

b. Beberapa Sketsa Parabola $y = f(x) = ax^2 + bx + c$

	Sketsa kurva	Hubungan dengan Sumbu x	Sketsa Kurva	
$a > 0$ $D > 0$		Memotong sumbu x di dua titik		$a < 0$ $D > 0$
$a > 0$ $D = 0$		Memotong sumbu x di satu titik (menyinggung sumbu x)		$a > 0$ $D = 0$
$a > 0$ $D < 0$		Tidak memotong sumbu x		$a > 0$ $D < 0$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

7. Koordinat titik potong grafik fungsi kuadrat $y = 3x^2 - x - 2$ dengan sumbu x dan sumbu y adalah
- A. $(-1, 0)$, $(\frac{2}{3}, 0)$, dan $(0, 2)$
- B. $(-\frac{2}{3}, 0)$, $(1, 0)$, dan $(0, -2)$
- C. $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(1, 0)$, dan $(0, -\frac{2}{3})$
- D. $(-\frac{3}{2}, 0)$, $(-1, 0)$, dan $(0, -1)$
- E. $(\frac{3}{2}, 0)$, $(1, 0)$, dan $(0, 3)$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow y = 3x^2 - x - 2$$

Syarat memotong sumbu $x \rightarrow y = 0$

$$0 = 3x^2 - x - 2$$

$$0 = (3x + 2)(x - 1)$$

- $(3x + 2) = 0 \rightarrow x = -\frac{2}{3} \rightarrow (-\frac{2}{3}, 0)$

- $(x - 1) = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Syarat memotong sumbu $y \rightarrow x = 0$

$$y = 3(0)^2 - (0) - 2 = -2 \rightarrow (0, -2)$$

8. Jika grafik fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ mempunyai titik puncak $(8, 4)$ dan memotong sumbu- X negatif, maka

A. $a > 0, b > 0,$ dan $c > 0$

D. $a > 0, b > 0,$ dan $c < 0$

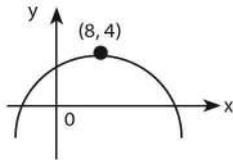
B. $a < 0, b < 0,$ dan $c > 0$

E. $a < 0, b > 0,$ dan $c > 0$

C. $a < 0, b > 0,$ dan $c < 0$

Jawaban: E

\Leftrightarrow Sketsa kurva yang memenuhi soal:



Dari sketsa kurva $f(x) = ax^2 + bx + c$ di atas diperoleh:

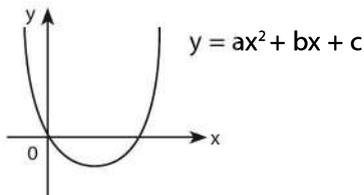
- terbuka ke bawah $\rightarrow a < 0$

- memotong sumbu Y positif $\rightarrow c > 0$

- $x_e = 8 > 0 \rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$

\Leftrightarrow Pernyataan yang memenuhi adalah E.

9. Gambar di bawah ini adalah grafik fungsi



- A. $ab > 0$ dan $a - b + c = 0$ D. $ab > 0$ dan $a - b + c < 0$
 B. $ab < 0$ dan $a - b + c > 0$ E. $ab < 0$ dan $a - b + c = 0$
 C. $ab < 0$ dan $a - b + c < 0$

Jawaban: B

- ⇔ Kurva $y = ax^2 + bx + c$
- terbuka ke atas → $a > 0$
 - memotong sumbu x positif → $c > 0$
 - sumbu simetri > 0

$$x_e > 0 \rightarrow -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow b > 0$$

- ⇔ Jadi, pernyataan yang benar adalah
- $ab < 0$ dan • $a - b + c > 0$

10. Jika parabola $y = ax^2 - (a+3)x + a$ menyinggung sumbu x dan terbuka ke bawah, maka $a = \dots$

- A. -1 dan 3 D. 3
 B. 1 dan -3 E. -3
 C. -1

Jawaban: C

⇔ $y = ax^2 - (a+3)x + a$

⇔ **Syarat menyinggung sumbu x:**

$$\begin{aligned} D = 0 &\rightarrow (a+3)^2 - 4A.A. = 0 \\ &-3a^2 + 6a + 9 = 0 \\ &a^2 - 2a - 3 = 0 \\ &(a-3)(a+1) = 0 \end{aligned}$$

- ⇔ Nilai a yang memenuhi supaya terbuka ke bawah ($a < 0$) → $a = -1$

11. Nilai p agar kurva $y = x^2 + (p - 3)x + p$ paling sedikit memotong sumbu x di sebuah titik adalah

- A. $p \leq 1$ atau $p \geq 9$ D. $1 < p < 9$
 B. $p < 1$ atau $p > 9$ E. $p \leq -9$ atau $p \geq -1$
 C. $1 \leq p \leq 9$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow y = x^2 + (p-3)x + p$$

\Leftrightarrow **Syarat memotong sumbu x:**

$$D \geq 0 \rightarrow (p-3)^2 - 4(1)(p) \geq 0$$

$$p^2 - 10p + 9 \geq 0$$

$$(p-1)(p-9) \geq 0$$

$$p \leq 1 \text{ atau } p \geq 9$$

12. Nilai m yang menyebabkan fungsi kuadrat $f(x) = (m+1)x^2 - 2mx + (m-3)$ definit negatif adalah

A. $m < -\frac{3}{2}$

D. $m > 1$

B. $m < -1$

E. $1 < m < \frac{3}{2}$

C. $m > -\frac{3}{2}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow f(x) = (m+1)x^2 - 2mx + (m-3)$$

\Leftrightarrow **Syarat definit negatif:**

- $a < 0 \rightarrow (m+1) < 0$

$$m < -1 \quad \dots(1)$$

- $D < 0$

$$(-2m)^2 - 4(m+1)(m-3) < 0$$

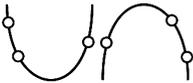
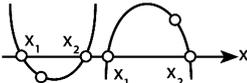
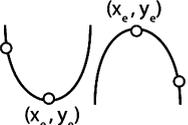
$$4m^2 - 4m^2 + 8m + 12 < 0$$

$$m < -\frac{3}{2} \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Nilai m yang memenuhi adalah irisan (1) dan (2) $\rightarrow m < -\frac{3}{2}$

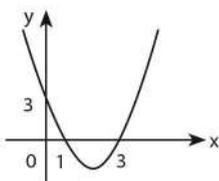
C. PERSAMAAN FUNGSI KUADRAT

Untuk menentukan persamaan fungsi kuadrat (**parabola**) dapat digunakan rumus sebagai berikut.

Data kurva	Persamaan parabola
	<ul style="list-style-type: none"> Parabola melalui tiga titik sembarang Rumus: $y = ax^2 + bx + c$
	<ul style="list-style-type: none"> Parabola memotong sumbu x di 2 titik dan melalui sebuah titik sembarang Rumus: $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
	<ul style="list-style-type: none"> Parabola mempunyai titik puncak (x_e, y_e) dan melalui sebuah titik sembarang Rumus: $y = a(x - x_e)^2 y_e$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

13.



Persamaan grafik fungsi pada gambar adalah

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| A. $y = x^2 - 2x + 3$ | D. $y = -x^2 - 2x - 3$ |
| B. $y = x^2 + 4x + 3$ | E. $y = -x^2 + 2x + 3$ |
| C. $y = x^2 - 4x + 3$ | |

Jawaban: C

⇔ Persamaan grafiknya adalah:

$$y = a(x_1 - x_2)(x - x_2)$$

$$y = a(-1)(x - 3)$$

$$\text{melalui } (0,3) \rightarrow 3 = a(0 - 1)(0 - 3)$$

$$3 = 3a \rightarrow a = 1$$

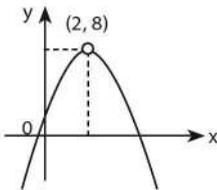
⇔ Persamaan grafiknya adalah

$$y = a(-1)(x - 3)$$

$$y = a(-1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

$$y = x^2 - 4x + 3$$

14.



Sketsa kurva parabola pada gambar di atas mempunyai persamaan

....

A. $y = 2x^2 + 8x$

D. $y = -2x^2 - 8x$

B. $y = 2x^2 - 8x$

E. $y = 6x - 2x^2$

C. $y = -2x^2 + 8x$

Jawaban: C

⇔ Persamaan grafiknya adalah:

$$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

$$y = a(x - 2)^2 + 8$$

$$\text{melalui } (0,0) \rightarrow 0 = a(0 - 2)^2 + 8$$

$$0 = 4a + 8 \rightarrow a = -2$$

⇔ Persamaan grafiknya adalah

$$y = -2(x - 2)^2 + 8$$

$$y = -2(x^2 - 4x + 4) + 8$$

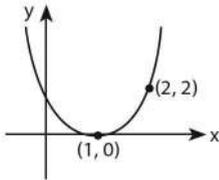
$$y = -2x^2 + 8x$$

15. Jika fungsi kuadrat f memiliki sifat-sifat $f(x) \geq 0$ untuk semua bilangan real x , $f(1) = 0$ dan $f(2) = 2$, maka nilai $f(0) + f(4)$ adalah

- A. 25
- B. 20
- C. 15
- D. 10
- E. 5

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f(x) \geq 0 \\ f(1) = 0 \\ f(2) = 2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \bullet \text{ parabola terbuka ke atas} \\ \bullet \text{ puncak parabola di } (1,0) \\ \bullet \text{ parabola melalui titik } (2,2) \end{array}$$



\Leftrightarrow Persamaan parabolanya:

$$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

$$y = a(x - 1)^2 + 0$$

$$\text{melalui } (2,2) \rightarrow 2 = a(2 - 1)^2 \rightarrow a = 2$$

\Leftrightarrow Jadi, pers parabolanya adalah

$$y = f(x) = 2(x - 1)^2$$

$$\bullet f(0) = 2(0 - 1)^2 = 2$$

$$\bullet f(4) = 2(4 - 1)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow f(0) + f(4) = 2 + 18 = 20$$

16. Fungsi $y = (x - 2a)^2 + 3b$ mempunyai nilai minimum 21 dan memotong sumbu y di titik yang berordinat 25. Nilai $a + b$ adalah

- A. 8 atau -8
- B. 8 atau 6
- C. -8 atau 6
- D. -8 atau -6
- E. 6 atau -6

Jawaban: B

⇔ Persamaan grafiknya adalah:

$$y = a(x - x_e)^2 + y_e$$

$$y = (x - 2a)^2 + 3b$$

$$\bullet 3b = 21 \rightarrow b = 7$$

⇔ Memotong sumbu-y dengan ordinat 25

$$x = 0 \rightarrow 25 = 4a^2 + 21$$

$$4a^2 = 4 \rightarrow a = \pm 1$$

⇔ Untuk $a = 1 \rightarrow a + b = 1 + 7 = 8$

Untuk $a = -1 \rightarrow a + b = -1 + 7 = 6$

D. HUBUNGAN PARABOLA DAN GARIS LURUS

Hubungan parabola $y_1 = px^2 + qx + r$ dengan garis lurus $y_2 = mx + n$ terjadi ketika $y_1 = y_2 \rightarrow$

$$\begin{aligned} px^2 + qx + r &= mx + n \\ \underbrace{p}x^2 + \underbrace{(q-m)}x + \underbrace{(r-n)} &= 0 \\ a \quad \quad \quad b \quad \quad \quad c \\ ax^2 + bx + c &= 0 \end{aligned}$$

Dengan memperhatikan nilai diskriminan $D = b^2 - 4ac$, hubungan parabola dan garis lurus adalah:

- $D > 0 \rightarrow$ kedua kurva **berpotongan pada dua titik**
- $D = 0 \rightarrow$ kedua kurva **bersinggungan** (berpotongan di 1 titik)
- $D < 0 \rightarrow$ kedua kurva **tidak berpotongan**.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 4

17. Ordinat titik potong antara garis $y = 2x + 1$ dan parabola $y = x^2 - x + 1$ adalah
- A. -1 dan 7
B. 0 dan -3
C. 1 dan 7
D. 1 dan -5
E. 0 dan 3

Jawaban: C

⇔ Kedua kurva berpotongan ketika

$$y_2 = y_1 \rightarrow x^2 - x + 1 = 2x + 1$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$x(x-3) = 0$$

$$\text{untuk } x = 0 \rightarrow y = 2(0) + 1 = 1$$

$$\text{untuk } x = 3 \rightarrow y = 2(3) + 1 = 7$$

⇔ Ordinat titik potongnya: $y = 1$ dan $y = 7$

18. Garis $y = 2x + k$ memotong parabola $y = x^2 - x + 3$ di titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1^2 + x_2^2 = 7$, nilai $k = \dots$

A. -1

D. 2

B. 0

E. 3

C. 1

Jawaban: D

⇔ Kedua kurva berpotongan ketika

$$y_1 = y_2 \rightarrow x^2 - x + 3 = 2x + k$$

$$x^2 - 3x + (3-k) = 0$$

$$\bullet \quad x_1^2 + x_2^2 = 7$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2(x_1 \cdot x_2) = 7$$

$$(-3)^2 - 2(3-k) = 7 \rightarrow k = 2$$

19. Jika garis lurus $y = 2x + 1$ menyinggung parabola $y = mx^2 + (m-5)x + 10$ maka nilai m sama dengan

A. 1

D. 1 atau 49

B. 49

E. 1 atau -49

C. -1 atau 49

Jawaban: D

⇔ Kedua kurva bersinggungan ketika

$$y_2 = y_1 \rightarrow mx^2 + (m-5)x + 10 = 2x + 1$$

$$mx^2 + (m-7)x + 9 = 0$$

syarat bersinggungan:

$$\begin{aligned}D = 0 &\rightarrow (m-7)^2 - 4(m)(9) = 0 \\m^2 - 50m + 49 &= 0 \\(m-1)(m-49) &= 0 \\m = 1 \text{ atau } m &= 49\end{aligned}$$

20. Gradien garis singgung kurva $y = x^2 - 3x$ di titik $(2,2)$ adalah

- A. 2
B. 4
C. 7
D. 9
E. 12

Jawaban: A

⇔ misal garis singgungnya $\rightarrow y = mx + n$
melalui titik $(2,0) \rightarrow 0 = 2m + n$
 $\rightarrow n = -2m$

Persamaan garis singgungnya adalah

$$y_2 = mx - 2m \quad \dots(1)$$

Persamaan fungsinya: $y_1 = x^2 - 2x \quad \dots(2)$

⇔ Kedua kurva bersinggungan ketika:

$$\begin{aligned}y_1 = y_2 &\rightarrow x^2 - 2x = mx - 2m \\x^2 - (2+m)x + 2m &= 0\end{aligned}$$

syarat bersinggungan:

$$\begin{aligned}D = 0 &\rightarrow \{-(2+m)^2 - 4(1)(2m)\} = 0 \\m^2 - 4m + 4 &= 0 \\(m-2)^2 &= 0 \\m &= 2\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

⇔ $y = x^2 - 2x \rightarrow y' = 2x - 2$

⇔ Gradien garis singgung kurva $f(x)$ di titik (x_1, y_1) adalah $m = f'(x_1)$

$$m = f'(2) = 2(2) - 2 = 2$$

21. Garis $y = mx + 4$ tak akan memotong atau menyinggung parabola $y = x^2 - 4x + 5$ jika nilai m memenuhi

- A. $-6 < m < -2$
- B. $-6 \leq m \leq -2$
- C. $-8 < m < -2$
- D. $m > -6$ atau $m > -2$
- E. $m \leq -6$ atau $m \geq -4$

Jawaban: A

⇔ Kedua kurva berpotongan ketika

$$y_1 = y_2 \rightarrow x^2 - 4x + 5 = mx + 4$$

$$x^2 - (4+m)x + 1 = 0$$

Syarat tidak memotong atau menyinggung:

$$D < 0 \rightarrow (4+m)^2 - 4(1)(1) < 0$$

$$m^2 + 8m + 12 < 0$$

$$(m+6)(m+2) < 0$$

⇔ Nilai m yang memenuhi: $-6 < m < -2$

22. Garis g melalui titik $T(1, 3)$ dan memiliki gradien m . Agar g memotong grafik $y = -x^2$ pada dua titik yang berbeda, maka haruslah

- A. $m > 2$
- B. $2 < m < 6$
- C. $-6 < m < 2$
- D. $m \leq -6$ atau $m \geq 2$
- E. $m < -6$ atau $m > 2$

Jawaban: E

⇔ Persamaan garis g adalah

$$y - 3 = m(x-1)$$

$$y = mx + (3-m) \quad \dots(1)$$

⇔ $y_1 = y_2 \rightarrow mx + (3-m) = -x^2$

$$x^2 + mx + (3-m) = 0$$

Syarat memotong di dua titik:

$$D > 0 \rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (3-m) > 0$$

$$m^2 + 4m - 12 > 0$$

$$(m+6) \cdot (m-2) > 0$$

⇔ Nilai m yang memenuhi adalah $m < -6$ atau $m > 2$

23. Jika $ax^2 + bx + c = 0$ tidak mempunyai akar real, maka grafik fungsi $y = ax^2 + bx + c$ akan menyinggung garis $y = x$, bila

A. $b < \frac{1}{2}$

D. $b > 2$

B. $b < 1$

E. $1 < b < 2$

C. $b < 2$

Jawaban: A

⇔ Persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ tidak mempunyai akar real:

• $D_1 < 0 \rightarrow b^2 - 4ac < 0$ (1)

⇔ Kedua kurva bersinggungan ketika

$$y_1 = y_2 \rightarrow ax^2 + bx + c = x$$
$$x^2 + (b-1)x + c = 0$$

Syarat bersinggungan

$$D_2 = 0 \rightarrow (b-1)^2 - 4ac = 0$$

$$b^2 - 2b + 1 - 4ac = 0$$

$$(b^2 - 4ac) = 2b - 1$$
(2)

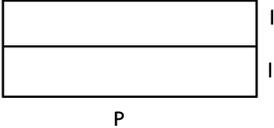
⇔ Substitusi pers (2) ke pers (1), sehingga menjadi $2b - 1 < 0 \rightarrow b < \frac{1}{2}$

LATIHAN SOAL 6

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

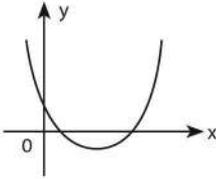
SOAL LATIHAN - 1

1. Jika nilai ekstrem fungsi $y = x^2 + nx + (11 + n)$ adalah 3, maka harga $n = \dots$
 - A. 4
 - B. 8
 - C. 4 atau -8
 - D. 4 atau 8
 - E. -4 atau 8
2. Diketahui $f(x) = x^2 - 4x + a$ mempunyai nilai ekstrem -6 . Fungsi $g(x) = ax^2 - 2ax + 1$ mempunyai jenis ekstrem
 - A. maksimum 3
 - B. maksimum 4
 - C. minimum 3
 - D. minimum 4
 - E. maksimum 5
3. Jika fungsi kuadrat $ax^2 + 4x + 3a$ mempunyai nilai maksimum -11 , maka $a^2 - a = \dots$
 - A. $-\frac{1}{6}$
 - B. $-\frac{1}{3}$
 - C. 3
 - D. 10
 - E. 20

4. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $2x^2 + ax + a = 6$, maka nilai minimum dari $x_1^2 + x_2^2$ adalah
- A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9
5. Jika fungsi $y = x^2 - (p+2)x + (2p+4)$ dan $y = x^2 - 4px + 8p$ mempunyai titik minimum yang sama, nilai p adalah
- A. 2
B. 3
C. $4/3$
D. $2/3$
E. $5/3$
6. Sepotong kawat akan dibentuk menjadi persegi panjang dengan panjang sama dengan tiga lebarnya. Agar luas persegi panjang tersebut tidak kurang dari 75 cm^2 , maka panjang kawat tersebut paling sedikit
- A. 64 cm
B. 56 cm
C. 48 cm
D. 40 cm
E. 32 cm
7. Kawat sepanjang 120 m akan dibuat kerangka seperti pada gambar. Agar luanya maksimum, panjang kerangka (p) tersebut adalah
- A. 16 m
B. 18 m
C. 20 m
D. 22 m
E. 24 m
- 
8. Dari karton berbentuk persegi dengan sisi 12 cm akan dibuat sebuah kotak tanpa tutup dengan cara menggunting empat persegi dipojoknya sebesar x cm. Volume kotak akan maksimum untuk $x =$
- A. 2 cm dan 6 cm
B. 2 cm
C. 4 cm
D. 6 cm
E. 8 cm

SUHAL LATIHAN - 1

9.



Jika parabola $y = x^2 + 2px + q$ seperti gambar di samping, maka

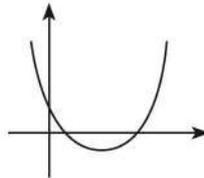
- (1) $p < 0$ (3) $p^2 > q$
(2) $q > 0$ (4) $p \cdot q >$

Pernyataan yang **benar** adalah

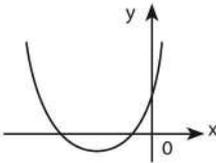
- A. (1), (2), dan (3) D. (4) saja
B. (1) dan (3) E. (1), (2), (3) dan (4)
C. (2) dan (4)

10. Jika $f(x) = bx^2 + cx + a$ memiliki kurva seperti pada gambar, maka yang benar dari hal di bawah ini

- A. $a > 0, b > 0$ dan $c < 0$
B. $a > 0, b > 0$ dan $c > 0$
C. $a < 0, b > 0$ dan $c > 0$
D. $a < 0, b > 0$ dan $c < 0$
E. $a < 0, b < 0$ dan $c < 0$



11. Gambar fungsi $y = ax^2 + bx + c$ ditunjukkan pada gambar di bawah ini.



Pernyataan yang sesuai adalah

- A. $ab > 0$ dan $a + b + c > 0$
B. $ab < 0$ dan $a + b + c > 0$
C. $ab > 0$ dan $a + b + c \leq 0$
D. $ab < 0$ dan $a + b + c < 0$
E. $ab < 0$ dan $a + b + c \geq 0$

12. Diketahui kurva $f(x) = (a + 1)x^2 - bx + a + b$ memotong sumbu x di dua titik yang berbeda. Jika $f(x)$ dibagi dengan x bersisa $-a$, maka
- A. $-\frac{1}{2} < a < 0$
 - B. $-2 < a < 0$
 - C. $a < -\frac{1}{2}$ atau $a > 0$
 - D. $a < -2$ atau $a > 0$
 - E. $a < 0$ atau $a > \frac{1}{2}$
13. Supaya fungsi kuadrat $f(x) = px^2 - (2p + 3)x + (p + 6)$ selalu bernilai positif, maka nilai p adalah
- A. $p < 0$
 - B. $p > \frac{3}{4}$
 - C. $p > 3$
 - D. $p > 4$
 - E. $0 < p < \frac{3}{4}$
14. Batasan nilai p agar kurva $y = x^2 + (p - 3)x + p$ memotong sumbu x adalah
- A. $p \leq 1$ atau $p \geq 9$
 - B. $p < 1$ atau $p > 9$
 - C. $1 \leq p \leq 9$
 - D. $1 < p < 9$
 - E. $p \leq -9$ atau $p \geq -1$
15. Supaya grafik fungsi $y = (m - 2)x^2 - 2mx + (m + 3)$ menyinggung sumbu x , maka nilai m yang memenuhi adalah
- A. 3
 - B. 4
 - C. 5
 - D. 6
 - E. 10
16. Grafik fungsi $y = (a - 3)x^2 + 2ax + (a + 2)$ menyinggung sumbu x di titik P memotong sumbu y di titik Q. Panjang ruas garis PQ adalah
- A. $\frac{2}{3}\sqrt{37}$
 - B. $1\frac{1}{3}\sqrt{15}$
 - C. $2\frac{1}{3}\sqrt{6}$
 - D. $3\sqrt{3}$
 - E. $4\sqrt{3}$

17. Semua parabola $y = mx^2 - 4x + m$ selalu di bawah sumbu x, apabila
- A. $m < 0$ D. $-2 < m < 0$
 B. $0 < m < 2$ E. $m < -2$
 C. $m < -2$ atau $m > 2$
18. Supaya grafik fungsi $y = (p + 6) + px + 2x^2$ memotong sumbu x di dua titik berbeda di sebelah kanan $O(0, 0)$, maka haruslah
- A. $p < 0$
 B. $-6 < p < 0$
 C. $-6 < p < -4$
 D. $-4 < p < 0$
 E. $-6 < p < -4$ atau $p > 12$
19. Agar kurva $y = mx^2 - 2mx + m$ seluruhnya terletak di atas kurva $y = 2x^2 - 3$, maka konstanta m memenuhi
- A. $m > 6$ D. $-6 < m < 2$
 B. $m > 2$ E. $-6 < m < 2$
 C. $2 < m < 6$
20. Titik $P(x_0, y_0)$ dan titik Q adalah dua titik yang terletak simetri pada parabola $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}$, maka absis titik Q adalah
- A. $2x_0 - \frac{b}{2a}$ D. $x_0 + \frac{b}{2a}$
 B. $-\frac{b}{2a} + x_0$ E. $-\frac{2b}{2a} - x_0$
 C. $-\frac{b}{2a} - x_0$
21. Jika nilai-nilai a, b, c dan d positif, maka grafik fungsi $ay - bx^2 - cx + d = 0$ akan memiliki:
- (1) 2 (dua) titik potong dengan sumbu x
 (2) nilai maksimum
 (3) nilai minimum
 (4) titik singgung dengan sumbu x

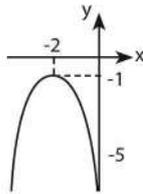
Pernyataan yang benar adalah

- A. (1), (2), dan (3)
- B. (1) dan (3)
- C. (2) dan (4)
- D. (4) saja
- E. (1), (2), (3) dan (4)

SOAL LATIHAN - 3

22. Jika gambar di bawah ini adalah grafik fungsi kuadrat f dengan titik puncak $(-2, -1)$ dan melalui titik $(0, -5)$, maka nilai $f(2)$ adalah

- A. -17
- B. -18
- C. -19
- D. -20
- E. -21



23. Persamaan salah satu garis singgung pada parabola $y = x^2 - 4x - 1$ yang melalui titik $(-2, 2)$ adalah

- A. $y = -3x - 4$
- B. $y = -2x - 2$
- C. $y = -x$
- D. $y = 2x + 6$
- E. $y = 3x + 8$

24. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ melalui titik $(0, 1)$, $(1, 0)$, dan $(3, 0)$. Jika titik minimum parabola tersebut adalah (p, q) , maka $q = \dots$

- A. $-2\frac{1}{3}$
- B. $-1\frac{2}{3}$
- C. $-1\frac{1}{3}$
- D. $-1\frac{1}{4}$
- E. $-\frac{1}{3}$

25. Grafik fungsi kuadrat yang mempunyai titik balik $(1, -4)$ dan melalui titik $(2, -3)$, persamaannya adalah

- A. $y = 2x^2 - 2x - 7$
- B. $y = 2x^2 - 2x - 5$
- C. $y = x^2 - 2x - 4$
- D. $y = x^2 - 2x - 3$
- E. $y = x^2 + 2x - 7$

26. Suatu fungsi kuadrat mempunyai nilai minimum -2 untuk $x = 3$ dan untuk $x = 0$ nilai fungsi itu 16 . Fungsi kuadrat itu adalah

- A. $f(x) = x^2 - 6x + 8$
- B. $f(x) = x^2 + 6x + 8$
- C. $f(x) = 2x^2 - 12x - 16$
- D. $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$
- E. $f(x) = 2x^2 + 12x + 16$

27. Grafik fungsi kuadrat yang memotong sumbu x di titik $(-4, 0)$ dan $(3, 0)$ serta memotong sumbu y di titik $(0, -12)$ mempunyai persamaan adalah

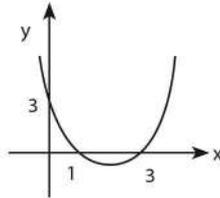
- A. $y = x^2 - x - 12$
- B. $y = x^2 + x - 12$
- C. $y = x^2 + 7x - 12$
- D. $y = x^2 - 7x - 12$
- E. $y = -x^2 + 7x - 12$

28. Fungsi kuadrat yang titik puncaknya adalah perpotongan garis $y = x + 3$ dan $5x + 2y = 20$ dan melalui $(0, 3)$ adalah

- A. $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3$
- B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 3$
- C. $y = 2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$
- D. $y = 2x^2 - \frac{1}{2}x + 3$
- E. $y = -2x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

29. Grafik di bawah ini adalah grafik dari

- A. $y = x^2 - 3x + 4$
- B. $y = x^2 - 4x + 3$
- C. $y = x^2 + 4x + 3$
- D. $y = 2x^2 - 8x + 3$
- E. $y = x^2 - 3x + 3$



30. Jika suatu fungsi kuadrat $f(x)$ diketahui bahwa $f(1) = f(3) = 0$ dan mempunyai nilai maksimum 1 , maka $f(x)$ adalah

- A. $x^2 - 4x + 3$
- B. $-x^2 + 4x - 3$
- C. $x^2 - 2x + 3$
- D. $-x^2 + 2x - 3$
- E. $x^2 - 2x - 3$

31. Garis $y = x - 1$ dan parabola $y = ax^2 + 6x + 1$ berpotongan di titik (2,1) dan
- A. (-3,-4)
 - B. (-2,-3)
 - C. $(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$
 - D. $(-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$
 - E. $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$
32. Kurva parabola $y = a^2x^2 + ax + a$ berada di bawah kurva parabola $2ax^2 - y + ax + 1 = 0$ jika
- A. $0 < a < 2$
 - B. $0 < a < 1$
 - C. $1 < a < 2$
 - D. $a < 0$
 - E. $a < 2$
33. Garis $y = -x - 3$ menyinggung parabola $y^2 - 2y + px = 15$. Absis puncak parabola adalah
- A. -4
 - B. -2
 - C. -1
 - D. 1
 - E. 2
34. Diketahui titik $(1, -\frac{3}{4})$ dibuat dua garis singgung pada parabola $y = \frac{1}{4}x^2$. Absis kedua titik singgungnya adalah
- A. -3 dan -1
 - B. -3 dan 1
 - C. -1 dan 1
 - D. -1 dan 3
 - E. 1 dan 3
35. Garis $4x + y + 5 = 0$ tidak memotong parabola $y = k(x^2 - 1)$ untuk semua nilai k yang memenuhi
- A. $k < 1$
 - B. $k > 4$
 - C. $1 < k < 4$
 - D. $0 < k < 4$
 - E. $0 < k < 1$
36. Garis $y = bx + 12$ menyinggung kurva $y = -x^2 + 2x + 8$, bila $b = \dots$
- A. -2 atau 6
 - B. 2 atau -6
 - C. 2 atau 6
 - D. -2 atau -6
 - E. -3 atau 4

37. Jika garis singgung di titik $(1, 2)$ pada parabola $y = ax^2 + bx + 4$ memiliki persamaan $y = -6x + 8$, maka nilai a dan b berturut-turut adalah
- A. 2 dan 4
 B. -4 dan 2
 C. -2 dan 0
 D. 2 dan -10
 E. 4 dan -6
38. Diberikan kurva $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 16 = 0$. Garis $y = kx$ memotong kurva di dua titik yang berbeda jika
- A. $k < 0$ dan $k > \frac{4}{3}$
 B. $k \leq 0$ dan $k \geq \frac{4}{3}$
 C. $0 \leq k \leq \frac{4}{3}$
 D. $0 < k < \frac{4}{3}$
 E. $k \leq 0$ atau $k \geq \frac{4}{3}$
39. Garis $y = x - 10$ akan memotong parabola $y = x^2 - (a - 2)x + 6$ hanya jika
- A. $a \leq -7$ atau $a \geq 9$
 B. $a \leq 6$ atau $a \geq 9$
 C. $a \leq -9$ atau $a \geq 7$
 D. $-7 \leq a \leq 9$
 E. $-6 \leq a \leq 9$
40. Garis $y = ax + b$ diketahui memotong parabola $y = 2x^2 + 5$ di titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1 + x_2 = 4$ dan $x_1 x_2 = 3$, maka nilai a dan b adalah
- A. $a = 8$ dan $b = -2$
 B. $a = 8$ dan $b = -1$
 C. $a = -8$ dan $b = -1$
 D. $a = -8$ dan $b = 1$
 E. $a = -8$ dan $b = 2$
41. Diketahui parabola $y = mx^2 - (m + 3)x - 1$ dan garis lurus $y = x - \frac{1}{2}$. Jika parabola dan garis lurus itu saling bersinggungan, maka nilai $m =$
- A. -2 atau 8
 B. -4 atau 4
 C. 2 atau -8
 D. -2 atau -8
 E. 2 atau 8

42. Garis g sejajar dengan $y = -3x + 3$ dan menyinggung kurva $y = 2x^2 + x - 3$. Jika garis g memotong sumbu y di titik $(0, b)$, maka $b = \dots$
- A. -6
 - B. -5
 - C. 0
 - D. 3
 - E. 5
43. Titik potong parabola $y = mx^2 + x + m, m \neq 0$ dengan garis $y = (m+1)x + 1$ adalah (x_1, y_1) dan (x_2, y_2) . Jika $x_1^2 + x_2^2 = 1$, maka nilai m adalah
- A. -2
 - B. -1
 - C. 0
 - D. 1
 - E. 2
44. Parabola $y = x^2$ memotong garis $y = x + 2$ di titik A dan B. Panjang ruas garis AB adalah
- A. 2
 - B. 3
 - C. $2\sqrt{3}$
 - D. $3\sqrt{2}$
 - E. 4



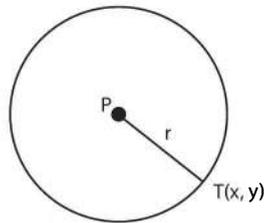
LINGKARAN

7

A. PENDAHULUAN & PERSAMAAN LINGKARAN

Lingkaran adalah kumpulan titik–titik yang berjarak sama terhadap sebuah titik tertentu pada sebuah bidang datar.

Jarak tersebut disebut **jari–jari** (r) lingkaran dan titik tetap disebut **titik pusat** (P) lingkaran.



a. Kedudukan Garis Terhadap Bidang

DATA YANG DIKETAHUI	PERSAMAAN LINGKARAN
• Pusat di titik $O(0,0)$ dan jari–jari r	• $x^2 + y^2 = r^2$
• Pusat di titik (u,v) dan jari–jari r	• $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
• Pusat di (u,v) dan menyinggung sumbu x	• $(x - u)^2 + (y - v)^2 = v^2$

- Pusat di (u,v) dan menyinggung sumbu y
- $(x-u)^2 + (y-v)^2 = u^2$
- Pusat $(P) = \left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right)$
- $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
- Jari-jari $(r) = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$

h. Rumus Jarak

- Jarak titik (x_o, y_o) ke garis $Ax + By + C = 0$

$$d = \left| \frac{Ax_o + By_o + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

- Jarak titik (x_1, y_1) ke titik (x_2, y_2)

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Tentukan pusat dan jari-jari lingkaran di bawah ini!

A. $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

B. $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y - 60 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2ax - 2by - 2ab = 0$

Pembahasan:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 8y - 8 = 0$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$A = -2, B = 8$ dan $C = -8$

- Pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (1, -4)$

- Jari-jari = r

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-4)^2 - (-8)}$$

$$= \sqrt{25} = 5$$

b) $4x^2 + 4y^2 + 8x + 24y - 156 = 0 \rightarrow (:4)$
 $x^2 + y^2 + 2x + 6y - 39 = 0$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$A = -2, B = 6$ dan $C = -39$

- Pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (1, -3)$

- Jari-jari = r

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$= \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 - (-40)}$$

$$= \sqrt{49} = 7$$

c) $x^2 + y^2 + 2ax - 2by - 2ab = 0$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$A = 2a, B = -2b$ dan $C = -2ab$

- Pusat $\left(-\frac{1}{2}A, -\frac{1}{2}B\right) = (-a, b)$

- Jari-jari = r

$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

$$= \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2 - (-2ab)}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab}$$

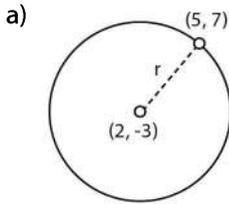
$$= \sqrt{(a+b)^2}$$

$$= |a+b|$$

2. Tentukan persamaan lingkaran yang:

- berpusat di $(2, -3)$ dan melalui titik $(5, 7)$
- berpusat di $(10, 5)$ dan menyinggung sb-y.
- berpusat di $(-1, -2)$ dan menyinggung garis $4x + 3y + 5 = 0$
- pusatnya pada garis $y = x - 3$ dan menyinggung sumbu x di titik $(5, 0)$.

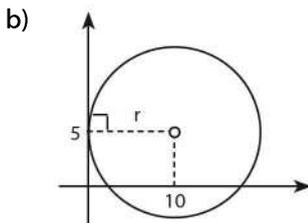
Pembahasan:



$$\begin{aligned}r &= \text{jarak titik } (2, -3) \text{ ke titik } (5, 7) \\ &= \sqrt{(2-5)^2 + (-3-7)^2} \\ &= \sqrt{9+100} \\ &= \sqrt{109}\end{aligned}$$

Persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, -3)$ dan jari-jari $\sqrt{109}$ adalah:

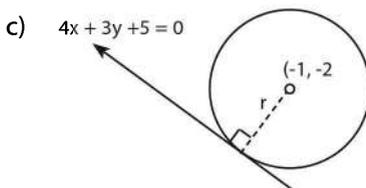
$$\begin{aligned}(x-2)^2 + (y+3)^2 &= (\sqrt{109})^2 = 109 \\ x^2 + y^2 - 4x + 6y - 96 &= 0\end{aligned}$$



karena menyinggung sumbu y , maka $r =$ absis titik pusat lingkarannya $= 10$.

Persamaan lingkaran yang berpusat di $(10, 5)$ dan jari-jari 10 adalah:

$$\begin{aligned}(x-10)^2 + (y-5)^2 &= (10)^2 = 100 \\ x^2 + y^2 - 20x - 10y + 25 &= 0\end{aligned}$$



r = jarak titik $(-1, -2)$ ke garis

$$4x + 3y + 5 = 0$$

$$= \left| \frac{4(-1) + 3(-2) + 5}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \right|$$

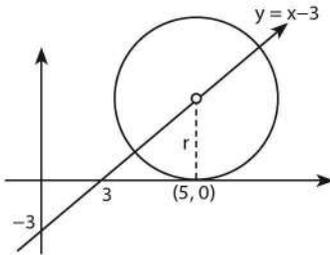
$$= \left| \frac{-5}{5} \right| = 1$$

Persamaan lingkaran yang berpusat di $(-1, -2)$ dan jari-jari 1 adalah

$$(x+1)^2 + (y+2)^2 = 1^2$$

$$x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0$$

d)



- Titik $(5, 0)$ pada garis $y = x - 3$
 $x = 5 \rightarrow y = 5 - 3 = 2$
- Pusat lingkarannya di $(5, 2)$ dan $r =$ ordinat titik pusatnya $= 2$
- Persamaan lingkaran yang berpusat di $(5, 2)$ dan jari-jari 2 adalah
 $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 4$
 $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 25 = 0$

3. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(4, 0)$ dan berdiameter $6\sqrt{2}$ adalah

A. $x^2 + y^2 - 8x - 2 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 8y - 34 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 8x - 2 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 8y - 34 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 8x - 34 = 0$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow d = 2r = 6\sqrt{2} \rightarrow r = 3\sqrt{2}$$

\Leftrightarrow Persamaan lingkaran yang berpusat di $(4,0)$ dengan $r = 3\sqrt{2}$ adalah:

$$(x-4)^2 + (y-0)^2 = (3\sqrt{2})^2$$

$$(x^2 - 8x + 16) + y^2 = 18$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 2 = 0$$

4. Persamaan lingkaran dengan pusat $P(3,1)$ dan menyinggung garis $3x + 4y + 7 = 0$ adalah

A. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 9 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 6 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$

Jawaban: C

\Leftrightarrow Jari-jari lingkaran (r) = jarak titik $(3,1)$ ke garis $3x + 4y + 7 = 0$ adalah

$$r = \left| \frac{3(3) + 4(1) + 7}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{20}{5} = 4$$

\Leftrightarrow Persamaan lingkaran dengan pusat $(3,1)$ dan jari-jari 4 adalah

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 2y - 6 = 0$$

5. Persamaan lingkaran dengan pusat $(-1,1)$ dan meyinggung garis $3x - 4y + 12 = 0$ adalah

A. $x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 7 = 0$

E. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 1 = 0$

C. $4x^2 + 4y^2 + 8x - 8y - 17 = 0$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Jari-jari (r) lingkaran} \\ &= \text{jarak titik } (-1,1) \text{ ke garis} \\ &= \left| \frac{3(-1) - 4(1) + 12}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \right| = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Persamaan lingkaran dengan titik pusat } (-1,1) \text{ dan } r = 1 \text{ adalah:} \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \\ x^2 + y^2 + 2x - 2y + 1 = 0 \end{aligned}$$

6. Lingkaran memotong sumbu-x di titik A dan B. Jika P adalah titik pusat lingkaran tersebut, maka $\cos \angle APB = \dots$

A. $\frac{7}{25}$

D. $\frac{16}{25}$

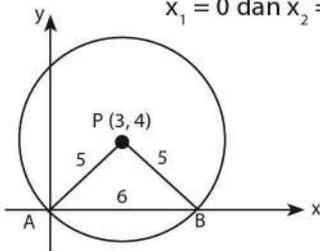
B. $\frac{8}{25}$

E. $\frac{18}{25}$

C. $\frac{12}{25}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 &= 25 \\ \bullet \text{ Titik pusat } P(3,4) \\ \bullet \text{ Jari-jari} &= r = 5 \\ \bullet \text{ Memotong sumbu } x &\rightarrow y = 0 \\ (x-3)^2 + (0-4)^2 &= 25 \\ (x-3)^2 &= 25 - 16 = 9 \\ (x-3) &= \pm 3 \\ x_1 &= 0 \text{ dan } x_2 = 6 \end{aligned}$$



$A(0,0)$ dan $B(6,0) \rightarrow AB = 6$

$$\Leftrightarrow \cos \angle APB = \frac{(5^2) + (5^2) - (6^2)}{2(5)(5)} = \frac{7}{25}$$

B. GARIS SINGGUNG LINGKARAN

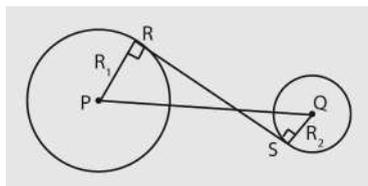
Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1) pada

- lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
- lingkaran $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
- lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$
- $x_1x + y_1y = r^2$
- $(x_1 - u)(x - u) + (y_1 - v)(y - v) = r^2$
- $Ax_1x + By_1y + \frac{1}{2}C(x + x_1) + \frac{1}{2}D(y + y_1) + E = 0$

Persamaan garis singgung dengan gradien (m) pada

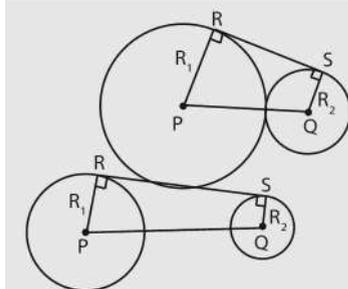
- lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
- lingkaran $(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2$
- $y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}$
- $(y - v) = m(x - u) \pm r\sqrt{m^2 + 1}$

Garis singgung persekutuan dalam



$$RS = \sqrt{(PQ)^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

Garis singgung persekutuan luar



$$RS = \sqrt{(PQ)^2 - (R_1 - R_2)^2}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

7. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ yang melalui titik $(3, -2)$ adalah
- A. $2x - 3y = -13$ D. $3x - 2y = 13$
B. $2x - 3y = 13$ E. $3x + 2y = 13$
C. $3x - 2y = -14$

Jawaban: D

- \Leftrightarrow Titik $(3, -2)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 = 13$, sehingga titik $(3, -2)$ sebagai titik singgung.
 \Leftrightarrow Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 13$ di titik $(3, -2)$ adalah $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 13 \rightarrow 3x - 2y = 13$

8. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7, 1)$ adalah
- A. $3x - 4y - 41 = 0$ D. $4x + 3y - 31 = 0$
B. $4x + 3y - 55 = 0$ E. $4x - 3y - 40 = 0$
C. $4x - 5y - 53 = 0$

Jawaban: D

- \Leftrightarrow Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik (x_1, y_1) adalah $x_1 \cdot x + y_1 \cdot y - \frac{6}{2}(x_1 + x) + \frac{4}{2}(y_1 + y) - 12 = 0$
 \Leftrightarrow Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7, 1)$ adalah $7x + y - 3(7 + x) + 2(1 + y) - 12 = 0$
 $4x + 3y - 31 = 0$

9. Persamaan salah satu garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$ yang melalui titik $P(0, 4)$ adalah
- A. $x\sqrt{3} + 3y = 12$ D. $-x\sqrt{3} + 3y = 4$
B. $x\sqrt{3} + 3y = 4$ E. $x\sqrt{3} + y = 12$
C. $-x\sqrt{3} + 3y = 6$

Jawaban: A

⇔ Persamaan garis singgung di titik (x_1, y_1)

pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$

adalah $x \cdot x_1 + y \cdot y_1 = 12$

melalui $P(0,4) \rightarrow 4 \cdot y_1 = 12$

$$y_1 = 3 \quad \dots(1)$$

⇔ Titik (x_1, y_1) pada lingkaran $x^2 + y^2 = 12$

$$x_1^2 + y_1^2 = 12 \quad \dots(2)$$

untuk $y_1 = 3$ substitusikan ke pers (1)

• $x_1^2 + 9 = 12 \rightarrow x_1^2 = 3 \rightarrow x_1 = \pm\sqrt{3}$

⇔ Persamaan garis singgung lingkarannya adalah $\pm\sqrt{3}x + 3y = 12$

10. Lingkaran $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16$ menyinggung garis $x = 2$ di titik

A. (2, 1)

D. (2, -6)

B. (2, -1)

E. (2, 4)

C. (2, 6)

Jawaban: B

⇔ $(x - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16$

untuk $x = 2 \rightarrow (2 - 6)^2 + (y + 1)^2 = 16$

$$16 + (y + 1)^2 = 16$$

$$(y + 1)^2 = 0$$

$$y = -1$$

⇔ Jadi, titik singgungnya adalah (2, -1)

11. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ yang tegak lurus garis $2y - x + 3 = 0$ adalah

A. $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\sqrt{5}$

D. $y = -2x + 5\sqrt{5}$

B. $y = \frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\sqrt{5}$

E. $y = 2x + 5\sqrt{5}$

C. $y = 2x - 5\sqrt{5}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$$

$$2y - x = 3 = 0 \rightarrow \text{gradien } (m_1) = \frac{1}{2}$$

\Leftrightarrow Persamaan garis singgung dengan gradien m pada lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$ adalah $y = mx \pm r \sqrt{m^2 + 1}$

• Persamaan garis singgung dengan gradien -2 pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah $y = -2x \pm 5\sqrt{4+1}$

$$y = -2x \pm 5\sqrt{5}$$

12. Persamaan garis singgung kurva $y = \sqrt{4-x^2}$ yang sejajar dengan garis lurus $x + y - 4 = 0$ adalah

A. $x + y = 0$

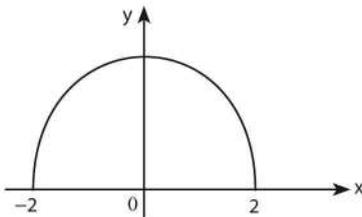
D. $x + y - 2\sqrt{2} = 0$

B. $x + y - \sqrt{2} = 0$

E. $x + y + 2\sqrt{2} = 0$

C. $x + y + \sqrt{2} = 0$

Jawaban: D



$$\Leftrightarrow y = \sqrt{4-x^2} \rightarrow y^2 = 4-x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

$\Leftrightarrow x + y - 4 = 0 \rightarrow \text{gradien } (m_1) = -1$
karena sejajar, maka $m_1 = m_2 = -1$

\Leftrightarrow Persamaan garis singgung pada lingkaran dengan gradien m adalah $y = mx \pm r \sqrt{m^2 + 1}$

$$y = -x \pm 2 \rightarrow x + y \pm 2 = 0$$

\Leftrightarrow Yang menyinggung separuh lingkaran yang berada di atas sumbu x (kuadran I) adalah $x + y - 2\sqrt{2} = 0$

13. Salah satu persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$ yang tegak lurus garis $y = 7 - 2x$ adalah

- A. $2x - y + 17 = 0$ D. $x - 2y + 3 = 0$
 B. $2x - y - 12 = 0$ E. $x - 2y = 0$
 C. $x - 2y - 3 = 0$

Jawaban: C

⇔ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$

- Pusat $(-3, 2)$

- Jari-jari $= r = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 - (-7)} = \sqrt{20}$

⇔ $y = 7 - 2x \rightarrow$ gradien $(m_1) = -2$

Karena \perp maka $m_2 = \frac{1}{2}$

⇔ Persamaan garis singgung lingkaran dengan $(-3,2)$, $r = \sqrt{20}$ dan $m = \frac{1}{2}$ adalah:

$(y - 2) = \frac{1}{2}(x + 3) \pm \sqrt{20} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} \rightarrow$ dikali (2)

$2y - 4 = (x + 3) \pm 10$

- untuk yang $+$ $\rightarrow x - 2y + 17 = 0$
- untuk yang $-$ $\rightarrow x - 2y - 3 = 0$

14. Diketahui suatu lingkaran dengan titik pusat berada pada kurva $y = \sqrt{x}$ dan melalui titik asal $O(0, 0)$. Jika absis titik pusat lingkaran tersebut adalah a , maka persamaan garis singgung lingkaran yang melalui O adalah

- A. $y = -x$ D. $y = -2x \sqrt{2}$
 B. $y = -x \sqrt{a}$ E. $y = -2ax$
 C. $y = -ax$

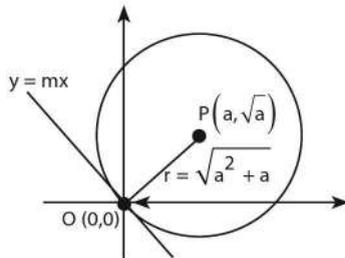
Jawaban: B

⇔ Titik pusat pada kurva $y = \sqrt{x}$

- absis titik pusat $x=a \rightarrow$ ordinatnya $y = \sqrt{a}$

Jari-jari lingkaran tersebut adalah jarak antara titik $(0,0)$ dengan

$$\begin{aligned} \text{titik } (a, \sqrt{a}) = r &= \sqrt{(a-0)^2 + (\sqrt{a}-0)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + a} \end{aligned}$$



⇔ Perhatikan gambar di atas garis singgung dengan garis yang melalui titik $(0,0)$ dan (a, \sqrt{a}) tegak lurus, maka

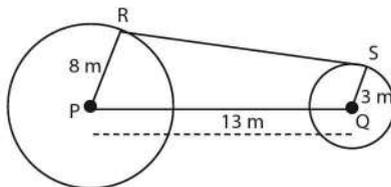
$$m_1 \cdot m_2 = -1 \rightarrow \left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) \cdot (m_2) = -1$$

$$\rightarrow m_2 = -\frac{a}{\sqrt{a}} = -\sqrt{a}$$

⇔ Persamaan garis singgung lingkarannya yang melalui titik $O(0,0)$ adalah

$$y = mx \rightarrow y = -\sqrt{a} x$$

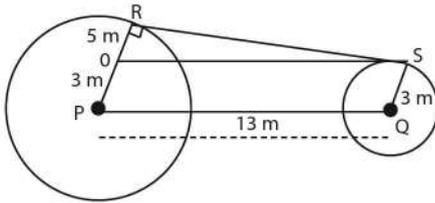
15.



Pada gambar di atas, RS adalah garis singgung persekutuan luar lingkaran P dan Q . Panjang garis singgung RS adalah

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. 11 cm | D. $\sqrt{160}$ cm |
| B. $\sqrt{143}$ cm | E. $\sqrt{194}$ cm |
| C. 12 cm | |

Jawaban: C



⇔ Panjang OS = PQ = 13 cm

⇔ Pada gambar terlihat bahwa $\triangle ORS$ siku-siku di R, sehingga ...

$$\begin{aligned} RS &= \sqrt{(OS)^2 - (RO)^2} \\ &= \sqrt{(13)^2 - (5)^2} \\ &= \sqrt{144} \\ &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

16. Diketahui M pusat lingkaran yang berjari-jari 1 cm, N pusat lingkaran yang berjari-jari 2 cm dan $MN = 5$ cm. Jika PQ garis singgung persekutuan yang memotong MN serta P dan Q titik-titik singgungnya, maka panjang PQ =

A. 3 cm

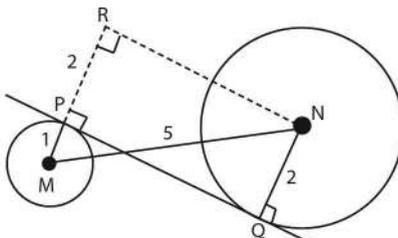
D. 3 cm

B. $2\sqrt{3}$ cm

E. $\frac{1}{2} (\sqrt{21} + 3)$ cm

C. 4 cm

Jawaban: C



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow PQ &= RN = \sqrt{(MN)^2 - (MR)^2} \\ &= \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 \text{ cm} \end{aligned}$$

17. Dua buah setengah lingkaran yang sama dan sebuah lingkaran saling bersinggungan dan terletak dalam sebuah siku empat (empat persegi panjang) seperti dalam gambar r adalah

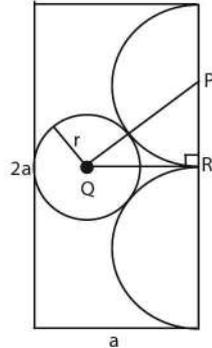
A. $\frac{a}{2}$

D. $\frac{a}{3}$

B. $\frac{a}{4}$

E. $\frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$

C. $\frac{a}{2}(\sqrt{10} - 2)$



Jawaban: D

⇔ Dari gambar

$$PR = \frac{1}{2}a$$

$$PQ = \frac{1}{2}a + r$$

$$QR = a - r$$

⇔ $(PQ)^2 = (QR)^2 + (PR)^2$

$$\left(\frac{1}{2}a + r\right)^2 = (a - r)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$\frac{1}{4}a^2 + ar + r^2 = a^2 - 2ar + r^2 + \frac{1}{4}a^2$$

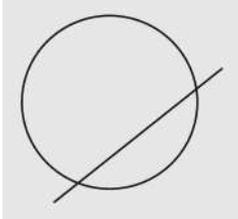
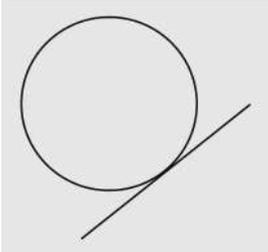
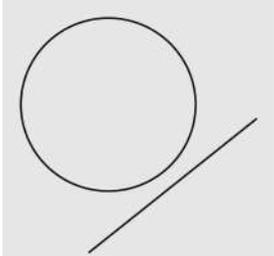
$$3ar = a^2 \rightarrow r = \frac{a}{3}$$

C. HUBUNGAN LINGKARAN

a. Hubungan Garis dan Lingkaran

Untuk melihat hubungan antara lingkaran dan garis lurus, substitusikan persamaan garis ke persamaan lingkaran sehingga membentuk persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$.

Hubungan keduanya dapat ditentukan berdasarkan nilai diskriminannya ($D = b^2 - 4ac$) sebagai berikut.

Hubungan	Hubungan
<p>memotong pada dua titik berbeda</p>	<p>$D > 0$</p> 
<p>memotong pada satu titik (bersinggungan)</p>	<p>$D = 0$</p> 
<p>tidak memotong pada satu titik pun</p>	<p>$D < 0$</p> 

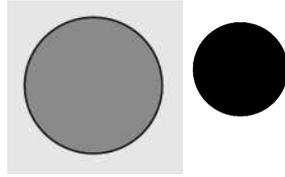
b. Hubungan Dua Duab Lingkaran

Jika lingkaran L_1 pusatnya P_1 dan jari-jarinya R_1 dan lingkaran L_2 pusatnya P_2 dan jari-jarinya R_2 , maka hubungan L_1 dan L_2 adalah sebagai berikut.

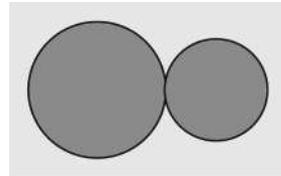
Hubungan L_1 dan L_2

Hubungan L_1 dan L_2

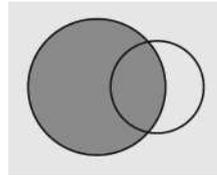
L_1 dan L_2 saling lepas (berada di luar), jika $(P_1P_2) > (R_1 + R_2)$



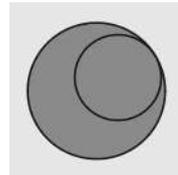
L_1 dan L_2 bersinggungan luar, jika $(P_1P_2) = (R_1 + R_2)$



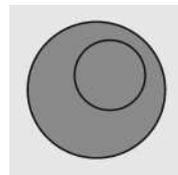
L_1 dan L_2 berpotong di dua titik, jika $|R_1 - R_2| < (P_1P_2) < (R_1 + R_2)$



L_1 dan L_2 bersinggungan dalam, jika $(P_1P_2) = |R_1 - R_2|$



L_1 di dalam L_2 atau L_2 di dalam L_1 , jika $(P_1P_2) < |R_1 - R_2|$



CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

18. Tentukan nilai A agar lingkaran $x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0$ dan garis $y = 0$,

- bersinggungan.
- berpotongan di dua titik.

Pembahasan:

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - Ax - 10y + 4 = 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{persamaan sumbu } x \text{ adalah } y = 0 \quad \dots(2)$$

substitusikan pers (2) ke pers (1) diperoleh: $x^2 - Ax + 4 = 0$

a) syarat bersinggungan adalah:

$$D = 0 \rightarrow A^2 - 4(1)(4) = 0$$

$$A^2 = 16$$

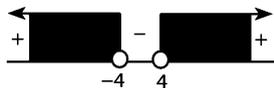
Nilai A yang memenuhi adalah ± 4

b) syarat berpotongan di dua titik adalah:

$$D > 0 \rightarrow A^2 - 4(1)(4) > 0$$

$$(A^2 - 16) > 0$$

$$(A-4)(A+4) > 0$$



Nilai A yang memenuhi adalah:

$$A < -4 \text{ atau } A > 4$$

19. Tentukan batasan a agar garis $y = ax + 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$

- bersinggungan
- berpotongan.
- tidak berpotongan.

Pembahasan:

⇔ substitusikan pers garis ke lingkaran, diperoleh:

$$x^2 + (ax + 2)^2 = 1$$

$$x^2 + a^2x^2 + 4ax + 4 = 1$$

$$(1 + a^2)x^2 + 4ax + 3 = 0$$

a) syarat bersinggungan adalah:

$$D = 0 \rightarrow (4a)^2 - 4(1 + a^2)(3) = 0$$

$$16a^2 - 12a^2 - 4 = 0$$

$$4a^2 - 4 = 0$$

$$4(a + 1)(a - 1) = 0$$

Nilai a yang memenuhi adalah ± 1

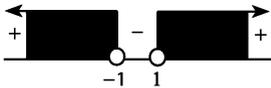
b) syarat berpotongan adalah:

$$D \geq 0 \rightarrow (4a)^2 - 4(1 + a^2)(3) \geq 0$$

$$16a^2 - 12a^2 - 4 \geq 0$$

$$4a^2 - 4 \geq 0$$

$$4(a + 1)(a - 1) \geq 0$$



Nilai a yang memenuhi adalah: $a \leq -1$ atau $a \geq 1$

c) syarat tidak berpotongan adalah:

$$D = 0 \rightarrow (4a)^2 - 4(1 + a^2)(3) < 0$$

$$16a^2 - 12a^2 - 4 < 0$$

$$4a^2 - 4 < 0$$

$$4(a + 1)(a - 1) < 0$$



Nilai a yang memenuhi: $-1 < a < 1$

20. Tentukan hubungan kedua lingkaran di bawah ini

a) $L_1: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$ dan $L_2: x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$

b) $L_1: x^2 + y^2 - 8x - 84 = 0$ dan $L_2: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$

c) $L_1: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$ dan $L_2: x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$

d) $L_1: x^2 + y^2 - 18x + 2y - 79 = 0$ dan $L_2: x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$

Pembahasan:

a) $L_1: x^2 + y^2 - 10x + 2y + 17 = 0$

• Pusat: $P_1(5, -1)$

$R_1 = \sqrt{25 + 1 - 17} = 3$

$\Leftrightarrow L_2: x^2 + y^2 + 8x - 22y - 7 = 0$

• Pusat: $P_2(-4, 11)$

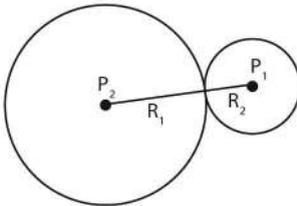
$R_2 = \sqrt{16 + 121 + 7} = 12$

\Leftrightarrow Jarak P_1 dan $P_2 = P_1 P_2$

$= \sqrt{(5 + 4)^2 + (-1 - 11)^2}$

$= \sqrt{225} = 15$

\Leftrightarrow Panjang $P_1 P_2 = R_1 + R_2 = 15$



$\Leftrightarrow L_1$ dan L_2 bersinggungan luar.

b) $L_1: x^2 + y^2 - 8x - 84 = 0$

• Pusat: $P_1(4, 0)$

$R_1 = \sqrt{16 + 0 - (-84)} = 10$

$$\Leftrightarrow L_2: x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$$

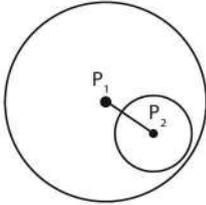
• Pusat: $P_2(0,3)$

$$R_2 = \sqrt{0+9-5} = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{Jarak } P_1 \text{ dan } P_2 = P_1.P_2$$

$$= \sqrt{(4-0)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\Leftrightarrow \text{Memenuhi: } (P_1P_2) < |R_1 - R_2|$$



\Leftrightarrow Hubungan kedua lingkaran tersebut adalah:

L_2 di dalam L_1 .

c) $L_1: x^2 + y^2 - 10x - 6y + 30 = 0$

• Pusat: $P_1(5,3)$

$$R_1 = \sqrt{25+9-30} = 2$$

$$\Leftrightarrow L_2: x^2 + y^2 + 2x + 10y + 25 = 0$$

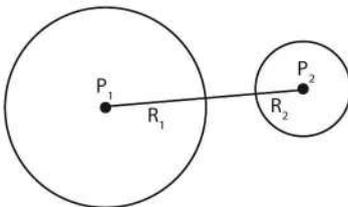
• Pusat: $P_2(-1, -5)$

$$R_2 = \sqrt{1+25-25} = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Jarak } P_1 \text{ dan } P_2 = P_1.P_2$$

$$= \sqrt{(5+1)^2 + (3+5)^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$\Leftrightarrow \text{Memenuhi: } (P_1P_2) > (R_1 + R_2)$$



⇔ Hubungan kedua lingkaran tersebut adalah:
 L_1 dan L_2 dan saling lepas (berada di luar)

d) $L_1: x^2 + y^2 - 18x + 2y - 87 = 0$

• Pusat: $P_1(9, -1)$

$$R_1 = \sqrt{81 + 1 - (-87)} = 13$$

⇔ $L_2: x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$

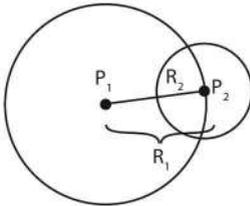
• Pusat: $P_2(-3, 4)$

$$R_2 = \sqrt{9 + 16 - (-24)} = 7$$

⇔ Jarak P_1 dan $P_2 = P_1P_2$

$$= \sqrt{(9+3)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{169} = 13$$

⇔ Memenuhi: $|R_1 - R_2| < (P_1P_2) < (R_1 + R_2)$



⇔ Hubungan kedua lingkaran tersebut adalah:
 L_1 dan L_2 berpotongan

LATIHAN SOAL 7

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jari-jari dan titik pusat lingkaran $4x^2 + 4y^2 + 4x - 12y + 1 = 0$ adalah
 - A. $\frac{3}{2}$ dan $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$
 - B. $\frac{3}{2}$ dan $\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 - C. $\frac{3}{2}$ dan $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$
 - D. 3 dan $(1, 3)$
 - E. 3 dan $(-1, 3)$
2. Lingkaran $x^2 + y^2 + 4x + by - 12 = 0$ melalui titik $(1, 7)$. Pusat lingkaran itu adalah
 - A. $(-2, -3)$
 - B. $(-2, 3)$
 - C. $(2, -3)$
 - D. $(-2, 4)$
 - E. $(-2, 6)$
3. Jika titik $(-5, k)$ terletak pada lingkaran $x^2 + y^2 + 2x - 5y - 21 = 0$, maka nilai k adalah
 - A. -1 atau -2
 - B. 2 atau 4
 - C. -1 atau 6
 - D. 0 atau 3
 - E. 1 atau -6

4. Persamaan lingkaran yang berpusat di titik $(-1, 3)$ dan berdiameter $\sqrt{40}$ adalah

A. $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$

D. $x^2 + y^2 + 2x - 6y = 0$

B. $x^2 + y^2 + 2x + 6y = 0$

E. $x^2 + y^2 - 2x - 6y = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$

5. Persamaan lingkaran yang berpusat di $(2, 3)$ dan melalui titik $(5, -1)$ adalah

A. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 25 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 13 = 0$

B. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$

E. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 25 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

6. Persamaan lingkaran yang berpusat di $(0, 0)$ dan bersinggungan dengan garis $x + y = 6$ adalah

A. $x^2 + y^2 = 6$

D. $x^2 + y^2 = 12\sqrt{2}$

B. $x^2 + y^2 = 3\sqrt{2}$

E. $x^2 + y^2 = 18$

C. $x^2 + y^2 = 9$

7. Empat lingkaran berjari-jari satu satuan saling bersinggungan disumbu koordinat (lihat gambar). Dilukis lingkaran M yang berpusat di titik asal O dan menyinggung keempat lingkaran tadi. Persamaan lingkaran M adalah

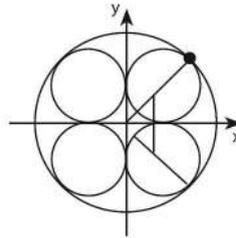
A. $x^2 + y^2 = 4$

B. $x^2 + y^2 = 8$

C. $x^2 + y^2 = 3 + 2\sqrt{2}$

D. $x^2 + y^2 = 6 + 4\sqrt{2}$

E. $x^2 + y^2 = 9 + 4\sqrt{2}$



8. Diberikan lingkaran dengan persamaan $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 14^2$. Jarak minimal titik pada lingkaran tersebut ke titik asal adalah

A. 14

D. 1

B. $\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{2}$

9. Diketahui $P(x, y)$, $A(3, 1)$, dan $B(-4, 0)$. Kurva yang mempunyai tempat kedudukan $PA = 2 PB$ akan berbentuk lingkaran dengan persamaan
- $3x^2 + 3y^2 - 38x + 2y + 54 = 0$
 - $3x^2 + 3y^2 + 38x - 2y + 54 = 0$
 - $3x^2 + 3y^2 + 38x + 2y - 54 = 0$
 - $3x^2 + 3y^2 + 38x + 2y + 54 = 0$
 - $3x^2 + 3y^2 + 38x - 2y - 54 = 0$
10. Lingkaran yang sepusat dengan lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 17 = 0$ dan menyinggung garis $3x - 4y + 7 = 0$ mempunyai persamaan
- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$
 - $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 16$
 - $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 25$
 - $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$
 - $(x - 4)^2 + (y + 6)^2 = 25$
11. Diketahui daerah $D = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 3 \text{ dan } -1 \leq y \leq 1\}$. Cakram lingkaran terkecil yang menutupi daerah D dan berpusat di perpotongan diagonal daerah D adalah
- $\{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \leq 4\}$
 - $\{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 4\}$
 - $\{(x, y) : x^2 + y^2 + 2x \leq 4\}$
 - $\{(x, y) : x^2 + y^2 - 2x \leq 5\}$
 - $\{(x, y) : x^2 + y^2 - 2y \leq 5\}$
12. Suatu lingkaran menyinggung sumbu- x di titik $(2, 0)$. Jari-jari lingkaran sama dengan 3 sedangkan pusat lingkaran berada di kuadran I. Jika lingkaran tersebut memotong sumbu- y di titik A dan B , maka panjang AB sama dengan
- $2\sqrt{5}$
 - $4\sqrt{5}$
 - 6
 - $6\sqrt{5}$
 - 0
13. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 45 = 0$ memotong sumbu X di titik A dan titik B . Jika P adalah pusat lingkaran dan $\angle APB = \theta$, maka $\tan \theta = \dots$
- $\frac{21}{20}$
 - $-\frac{21}{20}$
 - $\frac{20}{21}$
 - $-\frac{20}{21}$
 - $\frac{6}{7}$

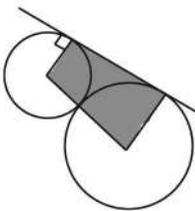
SOAL LATIHAN - 2

14. Persamaan garis singgung di titik $(-3, 4)$ pada lingkaran $x^2 + y^2 = 25$ adalah
- A. $y = \frac{4x}{3} - \frac{25}{3}$
B. $y = \frac{-4x}{3} + \frac{25}{3}$
C. $y = \frac{-3x}{4} + \frac{25}{4}$
D. $y = \frac{3x}{4} - \frac{25}{4}$
E. $y = \frac{3x}{4} + \frac{25}{4}$
15. Persamaan garis singgung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ di titik $(7, -5)$ adalah
- A. $4x - 3y = 43$
B. $4x + 3y = 23$
C. $3x - 4y = 41$
D. $10x + 3y = 55$
E. $4x - 5y = 53$
16. Persamaan garis singgung pada lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 7 = 0$ di titik yang berabsis 5 adalah
- A. $4x - y - 18 = 0$
D. $4x + y - 4 = 0$
B. $4x - y + 4 = 0$
E. $4x + y - 15 = 0$
C. $4x - y + 10 = 0$
17. Lingkaran $L \equiv (x+1)^2 + (y-3)^2 = 9$ memotong garis $y = 3$. Garis singgung lingkaran yang melalui titik potong antara lingkaran dan garis tersebut adalah
- A. $x = 2$ dan $x = -4$
B. $x = 2$ dan $x = -2$
C. $x = -2$ dan $x = 4$
D. $x = -2$ dan $x = -4$
E. $x = 8$ dan $x = -10$
18. Persamaan garis singgung yang memiliki gradien 3 pada lingkaran $x^2 + y^2 = 10$ adalah
- A. $y = 3x - 10$
B. $y = 3x - 100$
C. $y = 3x + 100$
D. $y = 3x + \sqrt{10}$
E. $y = 3x - \sqrt{10}$

19. Persamaan garis lurus yang melalui pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$ dan sejajar garis $x + 2y + 3 = 0$ adalah
- A. $x + 2y - 3 = 0$ D. $x - 2y - 1 = 0$
 B. $2x + y + 1 = 0$ E. $2x - y - 1 = 0$
 C. $x + 2y - 5 = 0$
20. Persamaan garis singgung lingkaran $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 40$ yang tegak lurus garis $x + 3y + 5 = 0$, adalah
- A. $y = 3x + 1$ dan $y = 3x - 30$ D. $y = 3x + 5$ dan $y = 3x - 35$
 B. $y = 3x + 2$ dan $y = 3x - 32$ E. $y = 3x - 5$ dan $y = 3x - 35$
 C. $y = 3x - 2$ dan $y = 3x - 32$
21. Kedua garis lurus yang ditarik dari titik $(0,0)$ dan menyinggung lingkaran L dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$, mempunyai gradien
- A. -1 dan 2 D. $\frac{1}{2}$ dan -2
 B. $-\frac{1}{2}$ dan 2 E. -1 dan 1
 C. 1 dan -2
22. Garis g tegak lurus pada garis $3x + 4y + 5 = 0$ dan berjarak 2 dari pusat lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 4 = 0$. Persamaan salah satu garis g adalah
- A. $3y - 4x + 20 = 0$ D. $4x - 3y - 50 = 0$
 B. $3y - 4x - 50 = 0$ E. $4x - 3y + 10 = 0$
 C. $4x - 3y - 10 = 0$
23. Diketahui sebuah lingkaran L: $x^2 + y^2 + 2y - 24 = 0$. Jika melalui titik $P(1, 6)$ dibuat garis singgung pada L, maka jarak dari P ke titik singgung tadi adalah
- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3

24. Dua buah lingkaran yang berdiameter $\sqrt{145}$ cm dan 10 cm berpotongan pada titik P dan Q. Jika PA diameter lingkaran pertama, PB diameter lingkaran kedua, dan $PQ = 8$ cm, maka AB sama dengan
- A. $\sqrt{45}$ cm
 B. 7,5 cm
 C. 12 cm
 D. 13 cm
 E. 15 cm
25. M adalah pusat sebuah lingkaran yang berjari-jari 11 cm dan N adalah pusat lingkaran yang berjari-jari 4 cm. Jarak M dan N 25 cm. Panjang garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran itu sama dengan
- A. 17 cm
 B. 18 cm
 C. 20 cm
 D. 21 cm
 E. 24 cm

26.



Dua lingkaran yang bersinggungan luar, masing-masing berjari-jari 8 cm dan 2 cm. Titik-titik singgung salah satu garis singgung persekutuan kedua lingkaran itu beserta titik-titik pusat lingkaran tersebut membentuk sebuah segi empat dengan luas

- A. 24 cm^2
 B. 40 cm^2
 C. 56 cm^2
 D. 68 cm^2
 E. 30 cm^2

SOAL LATIHAN - 3

27. Garis $x + y = q$ akan menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 = 8$ di titik P dalam kuadran I bila $q = \dots$
- A. 16
 B. 4
 C. $\frac{1}{4}$
 D. $\frac{1}{8}$
 E. $\frac{1}{16}$

28. Garis $x + y = 2$ menyinggung lingkaran $x^2 + y^2 - 6x - 2y + q = 0$ untuk $q = \dots$
- A. -8
B. 4
C. 6
D. 8
E. 16
29. Jika elips $x^2 + by^2 - 4x + c = 0$ menyinggung garis $y = 1$, maka
- A. $b = c$
B. $b = -c$
C. $b = 4 + c$
D. $b = 4 - c$
E. $b = c - 4$
30. Jika lingkaran $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ yang berpusat di $(1, -1)$ menyinggung garis $y = x$, maka nilai $a + b + c$ adalah
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4
31. Nilai a agar garis $y = ax + 2$ dan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ berpotongan adalah
- A. $a \leq -1$ atau $a \geq 1$
B. $a < -1$ atau $a > 1$
C. $-1 \leq a \leq 1$
D. $-1 < a < 1$
E. tidak ada
32. Jika garis $x + y = p$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 = 1 - p$, maka nilai p yang memenuhi adalah
- A. $(-1 - \sqrt{3}) < p < (-1 + \sqrt{3})$
B. $(-1 - \sqrt{3}) < p < (-1 + \sqrt{3})$
C. $p < (-1 - \sqrt{3})$ atau $p > (-1 + \sqrt{3})$
D. $p \leq (-1 - \sqrt{3})$ atau $p \geq (-1 + \sqrt{3})$
E. $p \geq (-1 + \sqrt{3})$
33. Persamaan garis yang melalui titik potong lingkaran $(x - 4)^2 + y^2 = 16$ dan $x^2 + (y + 2)^2 = 4$ adalah
- A. $y = 2x$
B. $y = \frac{1}{2} - x$
C. $y = \frac{1}{2} x$
D. $y = x$
E. $y = -2x$

34. Agar hanya ada sebuah nilai x dan sebuah nilai y yang memenuhi sistem persamaan $x + y = p$, $x^2 + y^2 = q^2$ dengan $q > 0$, maka
- A. $p < -q\sqrt{2}$ atau $p > q\sqrt{2}$ D. $p = -2q$ atau $p = 2q$
 B. $p = -q\sqrt{2}$ atau $p = q\sqrt{2}$ E. $p < -2q$ atau $p > 2q$
 C. $-q\sqrt{2} < p < q\sqrt{2}$
35. Lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 2px + q = 0$, $p > 0$, dan yang berjari-jari 2 akan menyinggung garis $x - y = 0$ bila $p = \dots$
- A. 2 D. $4\sqrt{2}$
 B. $2\sqrt{2}$ E. 8
 C. 4
36. Garis $x - 2y = 5$ memotong lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 8y + 10 = 0$ di titik A dan B. Panjang ruas garis AB adalah
- A. $4\sqrt{2}$ D. 5
 B. $2\sqrt{5}$ E. 4
 C. $\sqrt{10}$
37. Hubungan lingkaran $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$ dan $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 25 = 0$ adalah
- A. bersinggungan dalam D. saling lepas
 B. bersinggungan luar E. sepusat
 C. berpotongan di dua titik
38. Lingkaran $L_1 : x^2 + y^2 - 8x + 4y - 61 = 0$ dan
 $L_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$
- A. L_1 dan L_2 berpotongan di dua titik
 B. L_1 dan L_2 tidak berpotongan
 C. L_1 menyinggung L_2 di dalam
 D. L_1 menyinggung L_2 di luar
 E. L_2 terletak di dalam L_1



SISTEM PERSAMAAN

8

A. SISTEM PERSAMAAN DUA VARIABEL

Penyelesaian sistem persamaan linier dua variabel dapat diselesaikan dengan:

- Cara substitusi**, yaitu menggantikan (substitusi) salah satu peubah (variabel) persamaan dari peubah persamaan lainnya.
- Cara eliminasi**, yaitu menghilangkan (eliminasi) peubah (variabel) persamaan dengan cara mengurangi atau menambahkan persamaan yang ada.
- Campuran**, yaitu gabungan cara eliminasi dan substitusi.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Penyelesaian dari $\begin{cases} 2x - 5y = 31 \\ 7x + 3y = 6 \end{cases}$ adalah $x = a$ dan $y = b$, nilai $(a - b)^2 =$
- A. 4
B. 9
C. 25
D. 64
E. 121

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{pers (1)} \times 3 \rightarrow 6x - 15y = 93 \\ \text{pers (2)} \times 5 \rightarrow 35x + 15y = 30 \end{array} \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$41x = 123$$

$$x = 3 = a$$

substitusikan $x = 3$ ke pers (1)

$$2(3) - 5y = 31$$

$$6 - 31 = 5y$$

$$-25 = 5y \rightarrow y = -5 = b$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } (a - b)^2 = (3 - (-5))^2 = (8)^2 = 64$$

2. Sistem persamaan linier $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \\ 2ax + by = 4 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian jika

nilai $a + b$ adalah

- A. 2
B. 0
C. -1
D. -2
E. -4

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} 3x + y = 5 \\ x - y = -1 \end{array}$$

$$4x = 4 \rightarrow x = 1 \text{ dan } y = 2$$

\Leftrightarrow Titik $(1, 2)$ penyelesaian persamaan

$$2ax + by = 4 \rightarrow 2a + 2b = 4$$

$$a + b = 2$$

3. Jika x dan y memenuhi persamaan $3^{x+2y} = \frac{1}{81}$ dan $x - y = -1$, maka $x + xy + y$ sama dengan
- A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow 3^{x+2y} = 3^{-4} \rightarrow x + 2y = -4 \quad \dots(2)$$

$$x - y = -1 \rightarrow x = y - 1 \quad \dots(1)$$

\Leftrightarrow Substitusikan persamaan (1) ke pers (2)

$$(y-1)+2y = -4$$

$$y = -1 \text{ dan } x = -2$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } x + xy + y = -2 + 2 - 1 = -1$$

4. Jika ${}^2\log a - 2({}^2\log b) = 2$ dan ${}^2\log b - 2({}^2\log a) = -1$, maka nilai ab adalah

A. $\frac{1}{4}$

D. 2

B. $\frac{1}{2}$

E. 4

C. 1

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \text{pers (1)} \quad \times 2 \rightarrow 2({}^2\log a) - 4({}^2\log b) = 4$$

$$\Leftrightarrow \text{pers (2)} \quad \times 1 \rightarrow {}^2\log b - 2({}^2\log a) = -1$$

$$-3({}^2\log b) = 3$$

$$({}^2\log b) = -1$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Untuk $b = \frac{1}{2}$ substitusikan ke pers (2)

$$(-1) - 2({}^2\log a) = -1$$

$$({}^2\log a) = 0 \rightarrow a = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } ab = \frac{1}{2}$$

5. Tujuh tahun yang lalu umur ayah sama dengan 6 kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang 2 kali umur ayah sama dengan 5 kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah
- A. 39 tahun
 B. 43 tahun
 C. 49 tahun
 D. 54 tahun
 E. 78 tahun

Jawaban: B

⇔ Misal: a = ayah dan b = Budi

$$\Leftrightarrow (a - 7) = 6(b - 7)$$

$$a - 6b = -35 \rightarrow \text{dikali } 2$$

$$2a - 12b = -70 \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow 2(a + 4) = 5(b + 4) + 9$$

$$2a - 5b = 21 \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Jika } (1) - (2) \rightarrow -7b = -91$$

$$b = 13$$

⇔ Substitusikan b = 13 ke persamaan (1) diperoleh:

$$a - 6(13) = -35$$

$$a = 78 - 35 = 43$$

⇔ Umur ayah sekarang = 43 tahun

6. Rini membeli 3 buku, 1 pensil, dan 2 penghapus seharga Rp39.000,00. Agus membeli 1 buku, 2 pensil, dan 3 penghapus seharga Rp26.000,00. Harga 1 buku Rp5.000,00 lebih mahal daripada harga 1 pensil. Jika Dina membeli 2 buku, 4 pensil dan 5 penghapus, maka dia harus membayar sebesar
- A. Rp70.000,00
 B. Rp65.000,00
 C. Rp60.000,00
 D. Rp55.000,00
 E. Rp50.000,00

Jawaban: E

⇔ Misal:

a = buku, b = pensil, c = penghapus

$$3a + b + 2c = 39.000 \quad \dots(1)$$

$$a + 2b + 3c = 26.000 \quad \dots(2)$$

$$a = b + 5.000 \quad \dots(3)$$

- ⇨ Dari pers (1), (2), dan (3) diperoleh:
 $a = 10.000, b = 5.000, \text{ dan } c = 2.000$
- ⇨ Jadi, $2a + 4b + 5c = 2(10.000) + 4(5.000) + 5(2.000)$
 $= 20.000 + 20.000 + 10.000$
 $= 50.000$

7. Di suatu kandang terdapat 40 ekor ayam, 15 ekor di antaranya jantan. Di antara ayam jantan tersebut, 7 ekor berwarna putih. Jika banyak ayam berwarna putih adalah 22 ekor, maka banyak ayam betina yang tidak berwarna putih adalah
- A. 5 D. 10
B. 7 E. 15
C. 8

Jawaban: B



- ⇨ Dari diagram di atas terlihat, banyak **ayam betina yang tidak berwarna bukan putih** adalah 10 ekor.

8. Ibu mendapat potongan harga sebesar 25% dari total pembelian barang di suatu toko. Toko tersebut membebankan pajak sebesar 10% dari harga total pembelian setelah dipotong. Jika x adalah harga total pembelian, maka ibu harus membayar sebesar
- A. $(0,1 \times 0,25) x$ D. $(1,1 \times 0,25) x$
B. $(0,9 \times 0,25) x$ E. $(1,1 \times 0,75) x$
C. $(0,9 \times 0,75) x$

Jawaban: E

- ⇨ $x = \text{harga total pembelian}$
- Harga setelah diskon 25% $= x - 0,25 x = 0,75 x$
 - Beban pajak 10% $= \frac{10}{100} \cdot (0,75x) = 0,075x$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{Total pembayaran ibu dengan beban pajak 10\% dan diskon 25\% adalah:} \\
 &= 0,75x + 0,075x \\
 &= (0,75x)(1 + 0,1) \\
 &= (0,75x).(1,1)
 \end{aligned}$$

9. Agung mempunyai satu bundel tiket Piala Dunia untuk dijual. Pada hari pertama terjual 10 lembar tiket, hari kedua terjual setengah dari tiket yang tersisa, dan pada hari ketiga terjual 5 lembar tiket. Jika tersisa 2 lembar tiket, maka banyaknya tiket dalam satu bundel adalah
- | | |
|-------|-------|
| A. 20 | D. 23 |
| B. 21 | E. 24 |
| C. 22 | |

Jawaban: E

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{misal: } x &= \text{banyaknya tiket} \\
 \text{terjual hari I} &= 10 \text{ lembar} \\
 \text{terjual hari II} &= \frac{1}{2} (x - 10) \text{ lembar} \\
 \text{terjual hari III} &= 5 \text{ lembar} \\
 \text{sisanya yang tidak terjual} &= 2 \text{ lembar}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow x &= 10 + \frac{1}{2} (x - 10) + 5 + 2 \rightarrow \text{dikali 2} \\
 2x &= x + 24 \rightarrow x = 24
 \end{aligned}$$

10. Budi naik mobil dari kota A ke kota B selama 45 menit dengan kecepatan rata-rata 40 km/jam. Bila jarak kota A dan B hendak ditempuh dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam, maka waktu yang diperlukan Budi untuk menempuh jarak tersebut adalah
- | | |
|-------------|-------------|
| A. 20 menit | D. 45 menit |
| B. 25 menit | E. 50 menit |
| C. 30 menit | |

Jawaban: C

⇔ Jarak kota A ke kota B (s)

$$\begin{aligned}s &= v \cdot t \\ &= (40 \text{ km/jam}) \cdot (45 \text{ menit})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \left(\frac{40 \text{ km}}{60 \text{ menit}} \right) \cdot 45 \text{ menit} \\ &= 30 \text{ km}\end{aligned}$$

⇔ Jika kecepatan rata-ratanya 60 km/jam, maka waktu yang dibutuhkan (t) adalah:

$$\begin{aligned}\frac{s}{v} &= \frac{30 \text{ km}}{60 \text{ km / jam}} \\ &= 0,5 \text{ jam} \\ &= 30 \text{ menit}\end{aligned}$$

B. SISTEM PERSAMAAN LAINNYA

a. Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Cara penyelesaian dari sistem persamaan linear dengan tiga peubah x , y , dan z hampir sama dengan sistem persamaan linear dengan dua peubah x dan y yaitu dengan eliminasi, substitusi, gabungan cara eliminasi dan substitusi serta determinan.

b. Sistem Persamaan Dua Variabel, Satu Linear, dan Satu Kuadrat

Secara umum cara penyelesaian dari sistem persamaan linear dua peubah x dan y satu linear dan satu kuadrat lebih mudah dilakukan dengan cara substitusi.

c. Sistem Persamaan Kuadrat Dua Variabel

Secara umum cara penyelesaian dari sistem persamaan kuadrat dua peubah x dan y lebih mudah dilakukan dengan cara substitusi.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

11. Himpunan penyelesaian sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ adalah $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$. Nilai $x_1 + x_2 = \dots$
- A. -7
B. -1
C. 7
D. 8
E. 15

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x + y = 7 \rightarrow y = 7 - x \quad \dots(1)$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Substitusikan pers (1) ke pers (2)

$$x^2 + (7-x)^2 = 25$$

$$x^2 + 49 - 14x + x^2 = 25$$

$$2x^2 - 14x + 24 = 0$$

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{14}{2} = 7$

12. Sistem persamaan $\begin{cases} y = x + c \\ y = x^2 + 3x \end{cases}$ diketahui mempunyai penyelesaian tunggal. Nilai c dan $x + y$ berturut-turut adalah
- A. -1 dan -3
B. -1 dan -1
C. -1 dan 0
D. 1 dan -3
E. 1 dan 3

Jawaban: A

\Leftrightarrow Kedua persamaan tersebut mempunyai penyelesaian ketika:

$$y_1 = y_2$$

$$x^2 + 3x = x + c$$

$$x^2 + 2x - c = 0$$

⇔ Supaya punya penyelesaian tunggal, maka:

$$D = 0 \rightarrow (2)^2 - 4(1) - c = 0$$

$$4 + 4c = 0 \rightarrow c = -1$$

$$\text{untuk } c = -1 \rightarrow x^2 + 2x - (-1) = 0$$

$$(x + 1)^2 = 0 \rightarrow x = -1$$

$$\text{untuk } x = -1 \rightarrow y = x + c = -1 - 1 = -2$$

⇔ Nilai $x + y = -1 - 2 = -3$

13. Nilai $(x+y)$ yang memenuhi persamaan $\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y}\right) = 1$ dan $\left(\frac{9}{x^2} - \frac{4}{y^2}\right) = 2$

adalah

A. -1

D. 2

B. -2

E. 3

C. -3

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y}\right) = 1 \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{x^2} - \frac{4}{y^2}\right) = 2$$

$$\underbrace{\left(\frac{3}{x} + \frac{2}{y}\right)}_1 \left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y}\right) = 2$$

$$\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{y}\right) = 2 \quad \dots(2)$$

⇔ Jika persamaan (1) + (2), maka:

$$2\left(\frac{3}{x}\right) = 3 \rightarrow x = 2$$

substitusikan $x = 2$ ke pers (1)

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{y}\right) = 1$$

$$\frac{2}{y} = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \rightarrow y = -4$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } (x + y) = 2 - 4 = -2$$

14. Jika $2x - z = 2$, $x + 2y = 4$, dan $y + z = 1$, maka nilai $3x + 4y + z$ adalah

....

- A. 4
B. 5
C. 6
D. 7
E. 8

Jawaban: E

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow (1) \rightarrow 2x - z = 2$$

$$(2) \rightarrow x + 2y = 4$$

$$(3) \times 2 \rightarrow 2y + 2z = 2$$

$$3x + 4y + z = 8$$

15. Jumlah x , y , dan z yang memenuhi sistem persamaan linier

$$2x + 3y + z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$3x + y + 2z = 6$$

adalah

- A. -1
B. 0
C. 2
D. 4
E. 5

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow 2x + 3y + z = 1$$

$$x + 2y + 3z = 5$$

$$3x + y + 2z = 6$$

$$6x + 6y + 6z = 12 \rightarrow \text{dibagi } (6)$$

$$x + y + z = 2$$

16. Harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 1 kg anggur adalah Rp70.000,00, sedangkan harga 1 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 2 kg anggur adalah Rp90.000,00. Jika harga 2 kg mangga, 2 kg jeruk, dan 3 kg anggur Rp130.000,00, maka harga 1 kg jeruk adalah
- A. Rp5.000,00 D. Rp12.000,00
 B. Rp7.500,00 E. Rp15.000,00
 C. Rp10.000,00

Jawaban: C

⇔ $x = \text{mangga}, y = \text{jeruk}, \text{ dan } z = \text{anggur}$

⇔ $2x + 2y + z = 70.000$... (1)

$x + 2y + 2z = 90.000$... (2)

$2x + 2y + 3z = 130.000$... (3)

⇔ Jika (1) – (2) diperoleh

$x - z = -20.000$... (4)

(2) – (3) diperoleh $-x - z = -40.000$... (5)

⇔ Jika (4) – (5) diperoleh $2x = 20.000 \rightarrow x = 10.000$ untuk $x = 10.000$ substitusikan ke pers (4) diperoleh $z = 30.000$

⇔ Untuk $x = 10.000$ dan $z = 30.000$ substitusikan ke pers (1) diperoleh $2(10.000) + 2y + (30.000) = 70.000$
 $2y = 20.000 \rightarrow y = 10.000$

17. Uang Amir Rp20.000,00 lebih banyak dibandingkan uang Budi ditambah dua kali uang Doni. Jumlah uang Amir, Budi, dan Doni adalah Rp100.000,00. Selisih uang Budi dan Doni adalah Rp5.000,00. Uang Amir adalah
- A. Rp22.000,00 D. Rp67.000,00
 B. Rp33.000,00 E. Rp80.000,00
 C. Rp51.000,00

Jawaban: D

⇔ Misal: $a = \text{Amir}, b = \text{Budi}$ dan $c = \text{Doni}$

$a = b - 20.000 + 2c$

$a - b - 2c = 20.000$... (1)

$a + b + c = 100.000$... (2)

$b - c = 5.000$... (3)

- ⇔ Jika pers (2) + (3) diperoleh hasil:
 $a + 2b = 105.000$... (4)
- ⇔ Jika pers (2) dikali 2 diperoleh:
 $2a + 2b + 2c = 200.000$... (5)
- ⇔ Jika pers (1) + (5) diperoleh hasil:
 $3a + b = 220.000 \rightarrow$ dikali 2
 $6a + 2b = 440.000$... (6)
- ⇔ Jika (4) – (6) diperoleh hasil:
 $-5a = -335.000 \rightarrow a = 67.000$

18. Andi, Baba, dan Ciko masing-masing berlari dengan kecepatan 5, 6, dan 7 km/jam. Mereka memulai dari tempat yang sama masing-masing pada pukul 06.00, 06.30, dan 07.00 di pagi hari. Mereka pergi melalui jalur yang sama. Ketika Baba melewati Andi, ia memberikan pesan untuk Ciko, maka Ciko akan menerima pesan itu pada pukul

....

- A. 09.15
 B. 09.30
 C. 09.45
 D. 08.30
 E. 08.45

Jawaban: B

- ⇔ $v_A = 5$ km/jam dan $t_A = t$ jam
 $v_B = 6$ km/jam dan $t_B = (t - \frac{1}{2})$ jam
 $v_C = 7$ km/jam dan $t_C = (t - 1)$ jam
- ⇔ $s_A = s_C \rightarrow v_A \cdot t_A = v_C \cdot t_C$
 $5t = 7(t-1)$
 $5t = 7t - 7$
 $2t = 7$
 $t = \frac{7}{2}$ jam
 $t = 3$ jam 30 menit
- ⇔ Ciko menerima pesan tersebut pukul: 06.00 + 3 jam 30 menit = 09.30

LATIHAN SOAL 8

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika x dan y memenuhi persamaan $2x - y = 4$ dan $x + y = 2$, maka nilai $x - 2xy + y$ adalah
A. 0
B. 1
C. 2
D. -1
E. -2
2. Jika x dan y memenuhi persamaan $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 14 \\ \frac{3}{x} + \frac{1}{y} = 20 \end{cases}$, maka $\frac{y}{x} = \dots$
A. -4
B. -3
C. -2
D. 2
E. 3
3. Jika $1 + \frac{1}{2^{200}} + \frac{1}{3^{200}} = B$, maka bentuk $201 - \frac{2}{2^{200}} - \frac{2}{3^{200}} = \dots$
A. $2B$
B. $100 - B$
C. $203 + B$
D. $203 - 2B$
E. $103 + 3B$

4. Jika x dan y memenuhi sistem persamaan $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1$ dan $\frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 8$,

maka $\frac{1}{x+y} = \dots$

A. $-\frac{3}{2}$

D. 5

B. $\frac{5}{6}$

E. 6

C. $\frac{6}{5}$

5. Perbandingan nilai x dan nilai y yang memenuhi persamaan

$$\begin{cases} \frac{5}{x-2} + \frac{2}{y-3} = 8 \\ \frac{4}{x-2} - \frac{2}{y-3} = 10 \end{cases} \text{ adalah } \dots$$

A. 2:1

D. 4:3

B. 3:2

E. 5:4

C. 1:3

6. Sistem persamaan linier $\begin{cases} x+y=3 \\ -x+3y=1 \\ ax+4by=4 \end{cases}$ mempunyai penyelesaian

jika nilai $a + 2b$ adalah

A. 4

D. -1

B. 2

E. -2

C. 0

7. Jika $a = 2,545454 \dots$ dan $b = 0,636363 \dots$, maka $a : b = \dots$

A. $4\frac{2}{11}$

D. $4\frac{4}{121}$

B. $4\frac{1}{11}$

E. 4

C. $4\frac{3}{121}$

8. Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $\frac{x - y + 7}{-2x + y + 5} = -3$ adalah

- A. -3
- B. -1
- C. 1
- D. 3
- E. 5

9. Nilai x yang memenuhi $\begin{cases} 2^{3x-2y} = \frac{1}{128} \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ adalah

- A. -2,5
- B. -2
- C. -1
- D. 1
- E. 2,5

10. Jika x dan y memenuhi sistem persamaan $2^{x+1} - 3^y = 7$ dan $-2^{x-1} + 3^{y+1} = 1$, maka nilai $x + y$ adalah

- A. 0
- B. 2
- C. 3
- D. 4
- E. 5

11. Nilai x dan y berturut-turut yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} 4^{x-2y+1} = 8^{2x-y} \\ 3^{x+y+1} = 9^{2x-y-4} \end{cases} \text{ adalah}$$

- A. 1 dan 2
- B. 1 dan -2
- C. 2 dan -1
- D. 2 dan -2
- E. tidak ada

12. Jika x dan y memenuhi persamaan $\begin{cases} 2 \cdot {}^2\log x + {}^2\log y = 4 \\ {}^2\log x - 4 \cdot {}^2\log y = -7 \end{cases}$, maka $\frac{y}{x}$

=

- A. -2
- B. -1
- C. 0
- D. 1
- E. 2

13. Diberikan sistem persamaan berikut.

$$2^{5x+y} = (0,25)^{x-2y+1\frac{1}{2}}$$
$$\log(x-y) = \frac{1}{{}^3\log 5 + {}^3\log 2}$$

Nilai-nilai x dan y yang memenuhi kedua persamaan tersebut mempunyai hubungan

- | | |
|-------------|--------------|
| A. $x = y$ | D. $y = -2x$ |
| B. $x = 2y$ | E. $x = -2y$ |
| C. $y = 2x$ | |

14. Siswa-siswi suatu kelas akan mengadakan wisata dengan bus. Sewa bus Rp120.000,00. Untuk memenuhi tempat duduk, 2 orang siswa kelas lain diajak serta. Dengan demikian ongkos bus per anak berkurang Rp100,00. Tempat duduk yang tersedia adalah

- | | |
|-------|-------|
| A. 52 | D. 44 |
| B. 50 | E. 42 |
| C. 48 | |

15. Sepuluh tahun yang lalu umur A dua kali umur B, 5 tahun kemudian umur A menjadi $1\frac{1}{2}$ kali umur B. Sekarang umur A adalah

- | | |
|-------|-------|
| A. 40 | D. 25 |
| B. 35 | E. 20 |
| C. 30 | |

16. Jika uang lelah 220 rupiah diberikan kepada 4 orang tukang kebun dan 2 orang pembersih ruangan, 140 rupiah diberikan kepada 3 orang tukang kebun dan seorang pembersih ruangan, maka masing-masing tukang kebun dan tenaga pembersih ruangan berturut-turut menerima uang lelah sebesar

- | | |
|------------------|------------------|
| A. Rp50 dan Rp10 | D. Rp30 dan Rp50 |
| B. Rp50 dan Rp30 | E. Rp20 dan Rp70 |
| C. Rp40 dan Rp30 | |

17. Enam tahun yang lalu, umur Budi 4 tahun lebih muda dari seperenam umur ayahnya. Umur Budi sekarang 3 tahun lebih tua dari seperdelapan umur ayahnya. Jumlah umur Budi dan ayahnya sekarang adalah
- A. 60 tahun
B. 57 tahun
C. 56 tahun
D. 54 tahun
E. 52 tahun
18. Jumlah dua bilangan adalah 62. Apabila bilangan yang besar dibagi dengan yang kecil hasil baginya adalah 2 dan sisanya 11, selisih kedua bilangan tersebut adalah
- A. 17
B. 28
C. 30
D. 45
E. 51
19. Suatu mobil meluncur dengan kecepatan 40 km selama satu jam, kemudian pada jam-jam berikutnya dengan kecepatan 45 kilometer, maka persamaan yang menyatakan jarak yang telah ditempuh setelah t jam ($t > 1$) adalah
- A. $d = 45t - 40$
B. $d = 95t - 40$
C. $d = 45t - 5$
D. $d = 95t - 5$
E. $d = 75t + 5$
20. Enam tahun yang lalu jumlah umur ayah dan ibu adalah sebelas kali selisihnya. Sekarang umur ayah adalah tujuh perenam dari umur ibu. Lima tahun yang akan datang umur ayah dan ibu masing-masing adalah
- A. 47 th dan 41 th
B. 47 th dan 42 th
C. 48 th dan 42 th
D. 48 th dan 41 th
E. 49 th dan 42 th

21. Pak Wawan melakukan suatu perjalanan. Ia menempuh $\frac{1}{3}$ perjalanannya menggunakan kereta dengan kecepatan 40 km/jam, kemudian melanjutkan $\frac{1}{3}$ perjalanannya menggunakan bus dengan kecepatan 60 km/jam dan sisanya menggunakan sepeda dengan kecepatan 30 km/jam. Kecepatan rata-rata Pak Wawan selama melakukan perjalanan tersebut adalah
- A. 30 km/jam
 B. 35 km/jam
 C. 40 km/jam
 D. 45 km/jam
 E. 50 km/jam
22. Alí berangkat dengan mobil dari kota A ke kota B dengan kecepatan rata-rata 60 km/jam. Badu menyusul 45 menit kemudian. Alí dan Badu masing-masing berhenti selama 15 menit dalam perjalanan, sedang jarak A dan B 225 km. Kecepatan yang harus diambil Badu supaya dapat tiba di kota B pada waktu yang sama adalah
- A. 70 km/jam
 B. 75 km/jam
 C. 80 km/jam
 D. 85 km/jam
 E. 90 km/jam
23. Sebuah bilangan berupa pecahan. Jika pembilangnya ditambah 2, maka nilai pecahan tersebut menjadi $\frac{1}{4}$, dan jika penyebutnya dikurangi 5 maka nilai pecahan tersebut menjadi $\frac{1}{5}$. Jumlah nilai pembilang dan penyebut pecahan tersebut adalah
- A. 16
 B. 18
 C. 20
 D. 23
 E. 26

24. Sebelum ibu diet, berat badan ayah 3 kg lebih berat daripada berat badan ibu. Setelah diet, perbandingan berat badan ayah dan berat badan ibu adalah 7 dibanding 6. Jika jumlah berat badan mereka setelah ibu diet adalah 117 kg, maka diet ibu berhasil menurunkan berat badan sebesar
- A. 6 kg
B. 5 kg
C. 4 kg
D. 3 kg
E. 2 kg
25. Andri pergi ke tempat kerja pukul 17.00 setiap sore. Jika menggunakan mobil dengan kecepatan 40 km/jam, maka dia tiba di tempat kerja terlambat 10 menit. Jika menggunakan mobil dengan kecepatan 60 km/jam, maka dia tiba di tempat kerja 20 menit sebelum jam kerja dimulai. Jadi, jarak antara rumah Andri dan tempat kerja adalah
- A. 120 km
B. 90 km
C. 80 km
D. 70 km
E. 60 km
26. Seorang pemborong dapat menyelesaikan suatu pekerjaan selama 64 hari dengan banyak pekerja 25 orang. Karena keperluan mendesak pekerjaan harus selesai 14 hari lebih cepat dari jadwal yang ditetapkan. Agar pekerjaan itu dapat selesai sesuai dengan waktunya, maka banyaknya pekerja yang harus ditambah sebanyak
- A. 5 pekerja lagi
B. 6 pekerja lagi
C. 7 pekerja lagi
D. 8 pekerja lagi
E. 9 pekerja lagi
27. Dua jenis teh dicampur. Teh Sukabumi harganya Rp960,00 per kg dan teh Slawi harganya Rp1.200,00 per kg. Untuk mendapatkan teh yang harganya Rp1000 per kg, perbandingan teh Sukabumi dan teh Slawi itu harus dicampur adalah
- A. 5:2
B. 5:1
C. 3:2
D. 3:1
E. 5:3

28. Setiap kali Ani membelanjakan $\frac{1}{5}$ bagian dari uang yang masih dimilikinya dan tidak memperoleh pemasukan uang lagi. Jika sisa uangnya kurang dari $\frac{1}{3}$ uangnya semula, berarti Ani paling sedikit sudah belanja
- A. 4 kali
B. 5 kali
C. 6 kali
D. 7 kali
E. 8 kali
29. Dua buah mobil menempuh jarak 450 km. Kecepatan mobil kedua setiap jamnya adalah 15 km/jam lebih daripada kecepatan mobil pertama. Jika waktu perjalanan mobil kedua 1 jam lebih pendek dari waktu perjalanan mobil pertama, maka rata-rata kecepatan kedua mobil tersebut adalah
- A. 97,5 km/jam
B. 92,5 km/jam
C. 87,5 km/jam
D. 85,0 km/jam
E. 82,5 km/jam
30. Seorang anak melihat dua balon udara di angkasa. Balon udara pertama berada 10 meter di atas permukaan tanah dan semakin tinggi dengan kecepatan 15 meter per menit. Balon udara kedua berada 120 meter di atas permukaan tanah dan semakin rendah dengan kecepatan 20 meter per menit. Tinggi balon kedua akan sama dengan dua kali tinggi balon pertama pada menit
- A. kedua
B. keenam
C. kedua belas
D. kelima belas
E. kedua puluh

SOAL LATIHAN - 2

31. Nilai $x + y$ yang memenuhi persamaan $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 31 \\ 3\sqrt{x} - 2\sqrt{y} = 1 \end{cases}$ adalah
- A. 8
B. 12
C. 50
D. 64
E. 74

32. x dan y adalah bilangan real $\begin{cases} x + xy + y = 1 \\ x^2y + xy^2 = -30 \end{cases}$. Banyaknya anggota

himpunan pasangan berurutan yang memenuhi sistem persamaan di atas adalah

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

33. Jika a dan b bilangan riil dengan $0 < a < b$ dan $a^2 + b^2 = 8ab$, maka

$$\frac{a-b}{a+b} = \dots$$

- A. $-\frac{1}{3}\sqrt{15}$
B. $-\frac{1}{5}\sqrt{15}$
C. $-\frac{1}{5}\sqrt{10}$
D. $-\frac{1}{5}\sqrt{15}$
E. $-\frac{1}{3}\sqrt{15}$

34. Keliling sebuah empat persegi panjang adalah 20 meter dan luasnya kurang dari 24 m^2 . Jika panjang salah satu sisinya a meter, maka

- A. $0 < a < 2$ atau $a > 12$
B. $0 < a < 2\sqrt{2}$ atau $a > 6\sqrt{2}$
C. $0 < a < 3$ atau $a > 8$
D. $0 < a < 2\sqrt{3}$ atau $a > 4\sqrt{3}$
E. $0 < a < 4$ atau $6 < a < 10$

35. Diketahui x , y dan z adalah bilangan positif. Jika $xy = 15$, $yz = 12$ dan $xz = 5$, maka nilai $xyz = \dots$

- A. 900
B. 300
C. 90
D. 30
E. 9

36. Jika (a, b, c) adalah solusi sistem persamaan linier $\begin{cases} 2x + 3y = -1 \\ x - 2z = -3 \\ 2y + 3z = 4 \end{cases}$,
maka $a + b + c = \dots$

- A. -4
B. -2
C. 0
D. 2
E. 4

37. Jika (a,b,c) adalah solusi sistem persamaan linier
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ x + y + 2z = 4 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$$
,

maka kaitan antara a dan b adalah

- A. $a = b - 2$ D. $a = 1 - b$
B. $a = b - 1$ E. $a = 2 - b$
C. $a = b$
38. Jika x, y dan z penyelesaian sistem persamaan $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} = 6$; $\frac{y}{6} - \frac{z}{2} = -2$;
 $\frac{z}{4} + \frac{x}{3} = 4$ maka $x + y + z = \dots$
- A. 4 D. 10
B. 6 E. 26
C. 8

39. Jika (x_0, y_0, z_0) penyelesaian sistem persamaan
$$\begin{cases} x + z = 3 \\ 2y - z = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$
, maka $x_0 +$

$y_0 + z_0 = \dots$

- A. 3 D. 8
B. 4 E. 11
C. 6

40. Jika x, y, z memenuhi persamaan-persamaan
$$\begin{cases} \log x + 2 \log y = 8 \\ \log y + 2 \log z = 13 \\ 2 \log x + \log z = 9 \end{cases}$$

maka $x + y + z = \dots$

- A. 10.001 D. 11.100
B. 10.010 E. 11.001
C. 11.010

41. Ada dua kubus yang selisih rusuknya 4 cm dan selisih volumenya 784 cm^3 . Salah satu kubus itu adalah
- A. 14 cm
 - B. 13 cm
 - C. 12 cm
 - D. 11 cm
 - E. 10 cm
42. Diketahui jumlah dua bilangan 16 dan jumlah kuadratnya 146. Yang mana dari himpunan berikut yang paling sedikit memuat satu dari kedua bilangan tersebut.
- (1) {1, 2, 3, 4}
 - (2) {4, 5, 6, 7}
 - (3) {7, 8, 9, 10}
 - (4) {9, 10, 11, 12}
- Pernyataan yang **benar** adalah
- A. (1), (2), dan (3)
 - B. (1) dan (3)
 - C. (2) dan (4)
 - D. (4) saja
 - E. (1), (2), (3) dan (4)
43. Alan, Burhan, Cintia, dan Dimas bersama-sama mengumpulkan uang Rp 900.000,00. Alan menerima $\frac{1}{2}$ bagian dari total uang yang diterima oleh Burhan, Cintia, dan Dimas. Burhan menerima $\frac{2}{3}$ bagian dari total uang diterima oleh Cintia dan Dimas. Cintia menerima 3 kali lebih banyak dari yang diterima Dimas. Banyaknya uang yang diterima oleh Dimas adalah
- A. Rp85.000,00
 - B. Rp90.000,00
 - C. Rp100.000,00
 - D. Rp105.000,00
 - E. Rp110.000,00
44. Pada suatu hari Andi, Bayu, dan Jodi panen jeruk. Hasil kebun Jodi 10 kg lebih sedikit dari hasil kebun Andi dan lebih banyak 10 kg dari hasil kebun Bayu. Jika jumlah hasil panen dari ketiga kebun itu 195 kg, maka hasil panen Andi adalah
- A. 55 kg
 - B. 65 kg
 - C. 75 kg
 - D. 85 kg
 - E. 95 kg

45. Sebuah tangki air mempunyai dua saluran pengisian dan satu saluran pembuangan yang lajunya konstan. Saluran I dan II masing-masing dapat mengisi penuh tangki dari keadaan kosong dalam waktu 4 jam dan 12 jam. Saluran III dapat mengosongkan tangki dari keadaan penuh dalam waktu 6 jam. Jika ketiga saluran dijalankan secara bersamaan pada saat tangki kosong, maka tangki tersebut akan penuh dalam waktu
- A. 4 jam
B. 6 jam
C. 7 jam
D. 8 jam
E. 9 jam



PERTIDAKSAMAAN

9

A. SIFAT PERTIDAKSAMAAN DAN GARIS BILANGAN

Pertidaksamaan adalah kalimat terbuka yang menggunakan tanda $<$, \leq , $>$, dan \geq .

a. Sifat Umum Pertidaksamaan

Penjumlahan dan Pengurangan

- $a > b \rightarrow a \pm c > b \pm c$

Perkalian dan Pembagian

- $a > b$ dan $c > 0 \rightarrow a \cdot c > b \cdot c$ dan $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
- $a > b$ dan $c < 0 \rightarrow a \cdot c < b \cdot c$ dan $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$

Operasi Pemangkatan

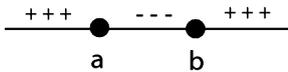
- $a < b < 0 \rightarrow a^n > b^n$ untuk $n \in$ bilangan **bulat genap**.
- $a > b > 0 \rightarrow a^n > b^n$ untuk $n \in$ bilangan **bulat genap**.
- $a > b \rightarrow a^n > b^n$ untuk $n \in$ bilangan **bulat ganjil**.

b. Tanda \pm pada Garis Bilangan

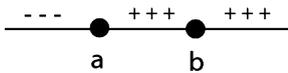
- Tanda koefisien pangkat tertinggi sama dengan tanda pada ruas paling kanan.
- Tanda dari faktor pangkat genap sama
- Tanda dari faktor pangkat ganjil berlawanan (berbeda)

Ilustrasi: untuk $a < b$ dengan $(x - a)^m(x - b)^n$

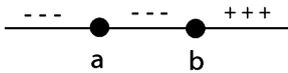
1. Jika m dan $n \in$ bilangan bulat **ganjil**



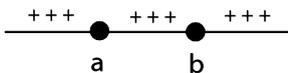
2. Jika $m \in$ bilangan bulat **ganjil** dan $n \in$ bilangan bulat **genap**



3. Jika $m \in$ bilangan bulat **genap** dan $n \in$ bilangan bulat **ganjil**



4. Jika m dan $n \in$ bilangan bulat **genap**



CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diantara pernyataan–pernyataan di bawah ini yang benar adalah
- A. jika $a \geq b$ dan $b \geq c$, maka $a > c$
 - B. jika $a < b$ dan $b < c$, maka $a > c$
 - C. jika $a < b$ dan $a < c$, maka $b < c$
 - D. jika $a > b$ dan $b > c$, maka $c < a$
 - E. jika $a > b$ dan $a > c$, maka $b > c$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} a > b \\ b > c \end{array} \right\} \rightarrow a > c$$

Pernyataan yang benar adalah D.

2. Jika $a > 5$ dan $b < 3$, maka nilai $a - b$ adalah
- A. lebih besar daripada 1 D. lebih kecil daripada 5
B. lebih besar daripada 3 E. lebih kecil daripada 2
C. lebih besar daripada 8

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} a > 5 \\ \hline b < 3 \quad - \\ \hline a - b > 2 \end{array}$$

\Leftrightarrow Pernyataan yang memuat SEMUA elemen dari $(a - b) > 2$ adalah **lebih besar daripada 1**

3. Jika $-2 < y < 3$, maka
- A. $9 < (y - 2)^2 < 16$ D. $0 < (y - 2)^2 < 16$
B. $4 < (y - 2)^2 < 16$ E. $-1 < (y - 2)^2 < 16$
C. $1 < (y - 2)^2 < 16$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow -2 < y < 3$$

- di setiap ruas dikurangi 2
 $-2 - 2 < (y - 2) < 3 - 2$
 $-4 < (y - 2) < 1$
- $-4 < (y - 2) < 0 \rightarrow$ dikuadratkan
 $0 < (y - 2)^2 < 16$

atau

- $0 \leq (y - 2) < 1 \rightarrow$ dikuadratkan
 $0 \leq (y - 2)^2 < 1$

\Leftrightarrow Jadi, yang memenuhi adalah $0 < (y - 2)^2 < 16$

4. Apabila $a < x < b$ dan $a < y < b$, maka berlaku
- A. $a < x - y < b$ D. $\frac{1}{2}(b - a) < x - y < \frac{1}{2}(a - b)$
- B. $b - a < x - y < a - b$ E. $\frac{1}{2}(a - b) < x - y < \frac{1}{2}(b - a)$
- C. $a - b < x - y < b - a$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow a < x < b \quad \dots(1)$$

$$a < y < b \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow (1) \text{ dikali } 1 \rightarrow a < x < b$$

$$(2) \text{ dikali } -1 \rightarrow -b < -y < -a$$

$$(a - b) < (x - y) < (b - a)$$

5. Jika a konstanta, maka $ax < a$ memberikan
- (1) $x < 1$ untuk $a > 0$ (3) $x > 1$ untuk $a < 0$
- (2) $x = 1$ untuk $a = 0$ (4) $x > 1$ untuk semua $a \neq 0$
- Pernyataan yang **benar** adalah
- A. (1), (2), dan (3) D. (4) saja
- B. (1) dan (3) E. (1), (2), (3) dan (4)
- C. (2) dan (4)

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow ax < a \rightarrow x < 1 \text{ jika } a > 0$$

$$\rightarrow x > 1 \text{ jika } a < 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Pernyataan yang benar adalah (1) dan (3).}$$

B. JENIS-JENIS PERTIDAKSAMAAAN

a. Pertidaksamaan Linear

Langkah penyelesaian:

- Posisikan antara **variabel** dan **konstanta** pada ruas kanan dan kiri pertidaksamaan.
- Tentukan penyelesaiannya.

b. Pertidaksamaan Kuadrat

Langkah penyelesaian:

- Jadikan **nol pada ruas kanan** pertidaksamaan
- Tentukan **pembuat nol fungsi** dengan cara **memfaktorkan** dalam faktor–faktor linear
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian

Catatan:

1. Jika bentuk $ax^2 + bx + c$ **sulit difaktorkan**, maka analisa nilai a dan $D = b^2 - 4ac$.
 - jika $\left. \begin{array}{l} a > 0 \\ D < 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ bentuk $ax^2 + bx + c$ **definit positif**
 - jika $\left. \begin{array}{l} a < 0 \\ D < 0 \end{array} \right\} \rightarrow$ bentuk $ax^2 + bx + c$ **definit negatif**.
2. Untuk $x_1 < x_2$ dan $(x - x_1)(x - x_2) < 0$, penyelesaiannya adalah $x_1 < x < x_2$
3. Untuk $x_1 < x_2$ dan $(x - x_1)(x - x_2) > 0$, penyelesaiannya adalah $x < x_1$ atau $x > x_2$

c. Pertidaksamaan Pangkat Tinggi

Langkah penyelesaian:

- Jadikan **nol pada ruas kanan** pertidaksamaan.
- Tentukan **pembuat nol fungsi** dengan cara **memfaktorkan** dalam faktor–faktor linear .
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

6. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $2x - 1 < x + 1 < 3 - x$ adalah
- | | |
|---------------------------|-----------------------|
| A. $\{x \mid x < 1\}$ | D. $\{x \mid x > 2\}$ |
| B. $\{x \mid x < 2\}$ | E. $\{x \mid x > 1\}$ |
| C. $\{x \mid 1 < x < 2\}$ | |

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow 2x - 1 < x + 1 < 3 - x$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{I} \rightarrow 2x - 1 < x + 1 \\ \phantom{\text{I} \rightarrow} < x + 1 \\ \phantom{\text{I} \rightarrow} < 2 \end{array} \quad \dots(1)$$

$$\begin{array}{l} \text{II} \rightarrow x + 1 < 3 - x \\ \phantom{\text{II} \rightarrow} x + 1 < 3 - x \\ \phantom{\text{II} \rightarrow} < 2 \\ \phantom{\text{II} \rightarrow} < 1 \end{array} \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Irisan (1) dan (2) adalah $x < 1$

7. Pertaksamaan $2x - a > \frac{x-1}{2} + \frac{ax}{3}$ mempunyai penyelesaian $x > 5$. Nilai a adalah

- | | |
|------|------|
| A. 2 | D. 5 |
| B. 3 | E. 6 |
| C. 4 | |

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow 2x - a > \frac{x-1}{2} + \frac{ax}{3} \rightarrow \text{dikali 6}$$

$$12x - 6a > 3x - 3 + 2ax$$

$$9x - 2ax > (6a - 3)$$

$$x(9 - 2a) > (6a - 3)$$

$$x > \frac{6a - 3}{9 - 2a}$$

- penyelesaian $x > 5$

$$\Leftrightarrow \frac{6a-3}{9-2a} = 5 \rightarrow 6a-3 = 45-10a$$

$$16a = 48 \rightarrow a = 3$$

8. Nilai x yang memenuhi $x^2-3x-2 < 10-2x$ adalah
- A. $x < 4$
 - B. $x > -3$
 - C. $-3 < x < 4$
 - D. $-4 < x < -3$
 - E. $x > 4$ atau $x < -3$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow x^2-3x-2 &< 10-2x \\ x^2-x-12 &< 0 \\ (x-4)(x+3) &< 0\end{aligned}$$



$$-3 < x < 4$$

9. Jika $y = 2x + 1$, maka nilai y untuk x yang memenuhi $x^2 - 8x + 15 < 0$ adalah
- A. $4 < y < 6$
 - B. $5 < y < 9$
 - C. $6 < y < 10$
 - D. $7 < y < 11$
 - E. $8 < y < 12$

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow y = 2x + 1 &\rightarrow 2x = (y - 1) \\ \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 &< 0 \\ (x - 3)(x - 5) &< 0\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\Leftrightarrow 3 < x < 5 &\rightarrow \text{dikali 2} \\ 6 < 2x &< 10 \\ 6 < (y - 1) &< 10 \rightarrow 7 < y < 11\end{aligned}$$

10. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $(x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 > 0$ adalah

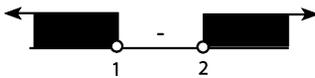
- A. $x < 2$ atau $x > 3$
- B. $2 < x < 3$
- C. $x < 1$ atau $x > 2$
- D. $x > 2$ atau $x < -4$
- E. $x > 0$ atau $x < -4$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 > 0$$

$$\{(x + 1) - 2\} \{(x + 1) - 3\} > 0$$

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi: $x < 1$ atau $x > 2$

11. Nilai-nilai a yang memenuhi $a^3 < a^2$ adalah

- A. $a < 1$
- B. $a > 1$
- C. $0 < a < 1$
- D. $a < 0$ atau $0 < a < 1$
- E. tidak ada

Jawaban: D



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $a < 0$ atau $0 < a < 1$

12. Jika $(x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) < 0$ maka nilai x yang memenuhi adalah

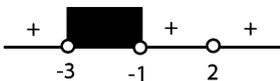
- A. $x > -1$
- B. $x < -3$
- C. $-1 < x < 2$
- D. $-1 < x < -2$
- E. $-3 < x < -1$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow (x^2 - x - 2)(x^2 + x - 6) < 0$$

$$(x - 2)(x + 1)(x + 3)(x - 2) < 0$$

$$(x - 2)^2(x + 1)(x + 3) < 0$$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi: $-3 < x < -1$

d. Pertidaksamaan Pecahan, (dengan $\frac{a}{b} \rightarrow h \neq 0$)

Langkah penyelesaian:

- Jadikan **nol pada ruas kanan** pertidaksamaan
- Faktorkan pembilang dan penyebut dalam faktor–faktor linear.
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

13. Untuk harga–harga x di bawah ini yang memenuhi $\frac{2x+3}{3x-7} > 0$ adalah

A. $\frac{7}{3} > x > -\frac{3}{2}$

D. $x < -\frac{7}{3}$ atau $x > \frac{3}{2}$

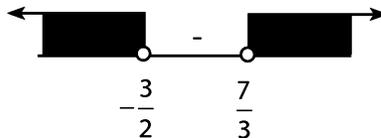
B. $x < -\frac{3}{2}$ atau $x > \frac{7}{3}$

E. $1 > x > \frac{2}{7}$

C. $-\frac{7}{3} < x < \frac{3}{2}$

Jawaban: B

$\Leftrightarrow \frac{2x+3}{3x-7} > 0$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah:

$x < -\frac{3}{2}$ atau $x > \frac{7}{3}$

14. Nilai x yang memenuhi $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+3} < 0$ terletak pada selang

A. $1 < x < 3$

D. $1 < x < 2$ atau $2 < x < 3$

B. $1 < x < 2$

E. $1 < x < 2$ dan $2 < x < 3$

C. $2 < x < 3$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 3} < 0$$
$$\frac{(x-2)(x-3)}{\text{definit } \oplus} < 0$$


\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $2 < x < 3$

15. $\frac{3}{x^2 - 3x + 2} < \frac{5}{x^2 - 4x + 3}$ berlaku untuk

- A. $x > \frac{1}{2}$
- B. $x > 2$
- C. $x > 3$
- D. $\frac{1}{2} < x < 3$
- E. $2 < x < 3$

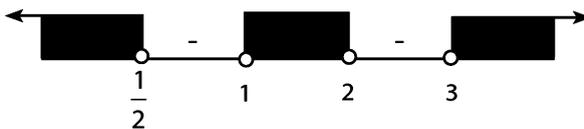
Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{3}{x^2 - 3x + 2} < \frac{5}{x^2 - 4x + 3}$$
$$\frac{3}{(x-1)(x-2)} - \frac{5}{(x-1)(x-3)} < 0$$

$$\frac{3(x-3) - 5(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0$$

$$\frac{(-2x+1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} < 0 \rightarrow \text{dikali } -1$$

$$\frac{(2x-1)}{(x-1)(x-2)(x-3)} > 0$$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $x < \frac{1}{2}$ atau $1 < x < 2$ atau $x > 3$

16. Jika $3 < a < 4$, maka semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan

$$\frac{-x^2 + ax - 5}{x^2 - 5x} \geq 0 \text{ adalah}$$

- A. $x > -2$
- B. $0 < x < 5$
- C. $x < 0$ atau $x > 5$
- D. $x < -2$ atau $x > 2$
- E. $x < 1$ atau $x > 2$

Jawaban: B

\Leftrightarrow Bentuk $(-x^2 + ax - 5) \rightarrow$ parabola

- $a < 0$
- $D = A^2 - 4(-1)(5)$
 $= a^2 - 20$ dengan $(3 < a < 4) \rightarrow D < 0$
- $\left. \begin{matrix} a < 0 \\ D < 0 \end{matrix} \right\} \rightarrow$ definit $(-)$

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2 + ax - 5}{x^2 - 5x} \geq 0 \rightarrow \frac{\text{def } (-)}{x(x-5)} \geq 0$$

$$x(x-5) < 0$$

Nilai x yang memenuhi adalah $0 < x < 5$

e. Pertidaksamaan Irrasional (Bentuk Akar dengan $\sqrt{a} \rightarrow a \geq 0$)

Langkah penyelesaian:

- Seimbangkan & pastikan di **kedua ruas nilainya positif**.
- Kuadratkan di kedua ruasnya.
- Jadikan **nol pada ruas kanan** pertidaksamaan
- Tentukan **pemuat nol fungsi** dengan cara **memfaktorkan** dalam faktor-faktor linear.
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian.
- Irisan **syarat akar** dengan **penyelesaian**

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

17. Nilai-nilai x yang memenuhi $(x + 2) > \sqrt{10 - x^2}$ adalah

- A. $-\sqrt{10} \leq x \leq \sqrt{10}$ D. $1 < x \leq \sqrt{10}$
 B. $x < -3$ atau $x > 1$ E. $-3 < x \leq \sqrt{10}$
 C. $2 \leq x \leq \sqrt{10}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{syarat: } (x + 2) > 0 \quad \dots(1)$$

$$x + 2 > \sqrt{10 - x^2} \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$2x^2 + 4x - 6 > 0 \rightarrow \text{dibagi 2}$$

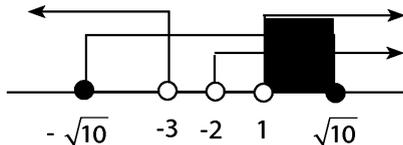
$$x^2 + 2x - 3 > 0$$

$$(x + 3)(x - 1) > 0 \quad \dots(2)$$

$$\text{syarat } \sqrt{10 - x^2} : 10 - x^2 \geq 0 \rightarrow \text{dikali -1}$$

$$x^2 - 10 \leq 0$$

$$(x - \sqrt{10}) \cdot (x + \sqrt{10}) \leq 0 \quad \dots(3)$$



$$\Leftrightarrow \text{Irisan dari (1), (2) dan (3) adalah } 1 < x \leq \sqrt{10}$$

18. Pertidaksamaan $\sqrt{x^2 - x} < \sqrt{2}$ mempunyai himpunan jawab

- A. $\{x \mid -1 < x < 2\}$
 B. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$
 C. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$
 D. $\{x \mid 1 \leq x < 2 \text{ atau } -1 < x \leq 0\}$
 E. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ atau } -1 \leq x \leq 0\}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} < \sqrt{2} \rightarrow \text{(kuadratkan)}$$

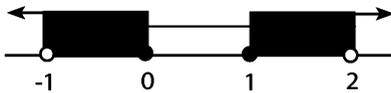
$$(x^2 - x) < 2$$

$$x^2 - x - 2 < 0$$

$$(x - 2)(x + 1) < 0 \quad \dots(1)$$

$$\text{syarat } \sqrt{10 - x^2} : (x^2 - x) \geq 0$$

$$x(x - 1) \geq 0 \quad \dots(2)$$



\Leftrightarrow Irisan dari (1) dan (2) adalah:
 $-1 < x \leq 0$ atau $1 \leq x < 2$

19. Nilai x yang memenuhi pertaksamaan $\sqrt{x+10} - \sqrt{x+2} < 2$ adalah
- A. $x > -1$
 - B. $x < 1$
 - C. $x > -2$
 - D. $x < 2$
 - E. $-1 < x < 1$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+10} < 2 + \sqrt{x+2} \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$x+10 < 4 + 4\sqrt{x+2} + (x+2)$$

$$10 < 6 + 4\sqrt{x+2}$$

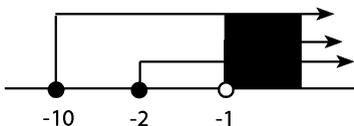
$$2 < 2\sqrt{x+2}$$

• dibagi 2 lalu kuadratkan

$$1 < x+2 \rightarrow x > -1 \quad \dots(1)$$

\Leftrightarrow syarat akar: • $(x+10) \geq 0 \rightarrow x \geq -10 \quad \dots(2)$

• $(x+2) \geq 0 \rightarrow x \geq -2 \quad \dots(3)$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $x > -1$

20. Jika $|2x - 3| < 1$ dan $2x < 3$, maka

A. $x < \frac{3}{2}$

D. $1 < x < \frac{3}{2}$

B. $1 < x < 2$

E. $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$

C. $\frac{3}{2} < x < 2$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow |2x - 3| < 1 \rightarrow -1 < (2x - 3) < 1$$
$$2 < 2x < 4$$

$$1 < x < 2 \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow 2x < 3 \rightarrow x < \frac{3}{2} \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Irisan (1) dan (2) adalah } 1 < x < \frac{3}{2}$$

21. Himpunan jawaban dari $|2x + 5| \leq x + 3$ adalah

A. $\{x \mid -\frac{8}{3} \leq x \leq -1\}$

D. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq -2\}$

B. $\{x \mid -\frac{7}{3} \leq x \leq -1\}$

E. $\{x \mid -\frac{5}{3} \leq x \leq -2\}$

C. $\{x \mid -\frac{8}{3} \leq x \leq -2\}$

Jawaban: C

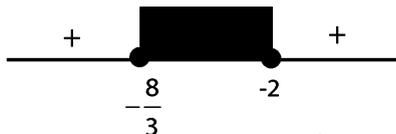
$$|x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$$

$$\Leftrightarrow |2x + 5| \leq x + 3$$

$$-(x + 3) \leq |2x + 5| \leq (x + 3)$$

$$-3x - 8 \leq 0 \text{ dan } x \leq -2$$

$$x \geq -\frac{8}{3} \text{ dan } x \leq -2$$



$$\Leftrightarrow \text{Nilai } x \text{ yang memenuhi: } -\frac{8}{3} \leq x \leq -2$$

22. Himpunan nilai-nilai $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi pertaksamaan $3|x + 3| \leq |x - 3|$ adalah

- A. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\}$
 B. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq -1 \text{ atau } x > 3\}$ E. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\}$
 C. $\{x \mid x \in \mathbb{R}, -6 \leq x \leq 1\frac{1}{2}\}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 3|x + 3| \leq |x - 3| \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$9(x^2 + 6x + 9) \leq (x^2 - 6x + 9)$$

$$8x^2 + 60x + 72 \leq 0 \rightarrow \text{dibagi 4}$$

$$2x^2 + 15x + 18 \leq 0$$

$$(2x + 3)(x + 6) \leq 0$$



$$\Leftrightarrow \text{Nilai } x \text{ yang memenuhi adalah } -6 \leq x \leq -1\frac{1}{2}$$

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow \underbrace{3x + 9}_a \leq \underbrace{|x - 3|}_b \rightarrow (a + b)(a - b) \leq 0$$

$$\{(3x + 9) + (x - 3)\} \cdot \{(3x + 9) - (x - 3)\} \leq 0$$

$$(4x + 6) \cdot (2x + 12) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } x \text{ yang memenuhi adalah } -6 \leq x \leq -1\frac{1}{2}$$

23. Nilai dari $\left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1$ dipenuhi oleh

- A. $-2 \leq x \leq x 8$
- B. $x \leq x - 8$ atau $x \geq^3 -2$
- C. $-8 \leq x < 1$ atau $x > 1$
- D. $-2 \leq x < 1$ atau $1 < x \leq 8$
- E. $x \leq -8$ atau $-2 \leq x < 1$ atau $x > 1$

Jawaban: E

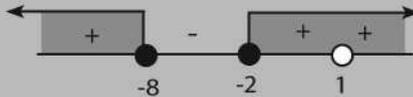
$$\Leftrightarrow \left| \frac{2x+7}{x-1} \right| \geq 1 \rightarrow \text{dikali silang}$$

$$\underbrace{\left| (2x+7) \right|}_a \geq \underbrace{\left| (x-1) \right|}_b \text{ dan } x \neq 1$$

SOLUSI SMART!

$$\{(2x+7) - (x-1)\} \{(2x+7) + (x-1)\} \geq 0$$

$$(x+8) \cdot (3x+6) \geq 0$$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi:
 $x \leq -8$ atau $-2 \leq x < 1$ atau $x > 1$

24. Jika $\sqrt{x^2 - 4x + 4} - |2x + 3| \geq 0$, maka

- A. $-3 \leq x \leq -\frac{1}{5}$
- B. $-5 \leq x \leq -\frac{1}{3}$
- C. $x \geq -5$
- D. $x \leq -5$ atau $x \geq -\frac{1}{3}$
- E. $x \leq -3$ atau $x \geq -\frac{1}{5}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 4} - |2x + 3| \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4} \geq |2x + 3|$$

• dikuadratkan

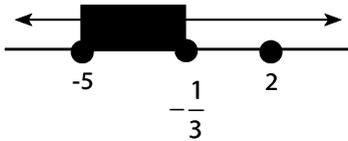
$$x^2 - 4x + 4 \geq 4x^2 + 12x + 9$$

$$3x^2 + 16x + 5 \leq 0$$

$$(3x + 1)(x + 5) \leq 0 \quad \dots(1)$$

syarat: $(x^2 - 4x + 4) \geq 0$

$$(x - 2)^2 \geq 0 \quad \dots(2)$$



$$\Leftrightarrow \text{Irisan dari (1) dan (2) adalah } -5 \leq x \leq -\frac{1}{3}$$

25. Himpunan nilai x yang memenuhi pertaksamaan $|x - 2|^2 < 4|x - 2| + 12$ adalah

A. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 8\}$

D. $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 4\}$

B. $\{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < 8\}$

E. $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$

C. $\{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 8\}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow |x - 2|^2 < 4|x - 2| + 12$$

$$|x - 2|^2 - 4|x - 2| - 12 < 0$$

misal: $p = |x - 2|$

$$p^2 - 4p - 12 < 0$$

$$(p - 6)(p + 2) < 0$$

$$-2 < p < 6$$

• $|x - 2| > -2 \rightarrow x \in \text{real}$

• $|x - 2| < 6 \rightarrow -6 < (x - 2) < 6$

$$-4 < x < 8$$

26. Jika $|10 - y| \leq x + 2$ dan $y - x \leq 3$, maka

A. $8 - x \leq y \leq x + 2$

D. $8 - x \leq y \leq x + 1$

B. $8 - x \leq y \leq x + 3$

E. $0 \leq y \leq x + 2$

C. $0 \leq y \leq x + 3$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |10 - y| &\rightarrow \leq x + 2 \\ -(x + 2) &\leq 10 - y \leq (x + 2) \\ -x - 12 &\leq -y \leq x - 8 \rightarrow \text{dikali } (-1) \\ 8 - x &\leq y \leq x + 12 \quad \dots(1) \\ y - x &\leq 3 \rightarrow y \leq 12 + x \quad \dots(2) \end{aligned}$$



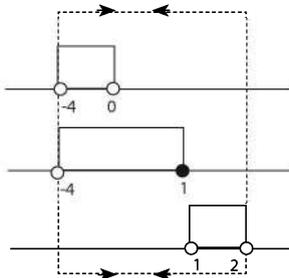
$$\Leftrightarrow \text{Irisan (1) dan (2): } 8 - x \leq y \leq x + 3$$

27. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $|x - 1| - 2|x| > -3$ adalah

- A. $\{x \mid -4 < x < 2\}$
- B. $\{x \mid x < -4 \text{ atau } x > 2\}$
- C. $\{x \mid 0 < x < 1\}$
- D. $\{x \mid -2 < x < 2\}$
- E. $\{x \mid -1 < x < 2\}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |x - 1| - 2|x| &> -3 \\ \bullet \text{ untuk } x < 0 &\rightarrow -(x-1) + 2x + 3 > 0 \\ &x > -4 \\ \text{yang memenuhi: } &-4 < x < 0 \quad \dots(1) \\ \bullet \text{ untuk } 0 < x \leq 1 &\rightarrow -(x-1) + 2x + 3 > 0 \\ &x > -4 \\ \text{yang memenuhi: } &-4 < x \leq 1 \quad \dots(2) \\ \bullet \text{ untuk } x > 1 &\rightarrow (x-1) - 2x > -3 \\ &-x > -2 \rightarrow x < 2 \\ \text{yang memenuhi: } &1 < x < 2 \quad \dots(3) \end{aligned}$$



\Leftrightarrow Gabungan (1), (2) dan (3) adalah $-4 < x < 2$

28. Himpunan semua nilai x yang memenuhi $x + |x - 3| \leq 3$ adalah
- A. $\{x \in R \mid x \leq 3\}$
B. $\{x \in R \mid x \geq 3\}$
C. $\{x \in R \mid -3 \leq x \leq 3\}$
- D. $\{x \in R \mid x \leq -3\}$
E. $\{x \in R \mid x \geq -3\}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} |x - 3| &\leq (3 - x) \\ -(3 - x) &\leq x - 3 \leq (3 - x) \\ x - 3 &\leq x - 3 \text{ dan } x - 3 \leq 3 - x \\ x &\rightarrow \text{real dan } (2x - 6) \leq 0 \rightarrow x \leq 3 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $x \leq 3$

29. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $\frac{|x|+2}{x} \leq 3$ adalah
- A. $\{x \mid x \geq 1\}$
B. $\{x \mid x \leq \frac{1}{2} \text{ atau } x \geq 1\}$
C. $\{x \mid 0 < x \leq 1\}$
- D. $\{x \mid x \leq 1\}$
E. $\{x \mid x < 0 \text{ atau } x \geq 1\}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \frac{|x|+2}{x} \leq 3$$

$|x| = x$, jika $x \geq 0$ atau $|x| = -x$, jika $x < 0$

$\frac{x+2}{x} \leq 3$	atau	$\frac{-x+2}{x} \leq 3$
$\frac{x+2-3x}{x} \leq 0$	atau	$\frac{-x+2-3x}{x} \leq 0$
$\frac{(2x-2)}{x} \geq 0$	atau	$\frac{(4x-2)}{x} \geq 0$

0 1

0 1/2

\Leftrightarrow Gabungannya: $\{x \mid x < 0 \text{ atau } x \geq 1\}$

LATIHAN SOAL 9

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dapat juga dinyatakan dengan
 - A. $\{x \mid 1 \leq x < 5, x \text{ bilangan cacah}\}$
 - B. $\{x \mid 1 \leq x \leq 5, x \text{ bilangan cacah}\}$
 - C. $\{x \mid 1 < x < 5, x \text{ bilangan asli}\}$
 - D. $\{x \mid 0 < x < 5, x \text{ bilangan cacah}\}$
 - E. $\{x \mid 1 < x < 5, x \text{ bilangan asli}\}$
2. a dan b adalah dua buah bilangan real positif dengan $a < b$.

(1) $a - b < 0$

(3) $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < 0$

(2) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} < 0$

(4) $a b < 0$

Pernyataan yang **benar** adalah

A. (1), (2), dan (3)

D. (4) saja

B. (1) dan (3)

E. (1), (2), (3) dan (4)

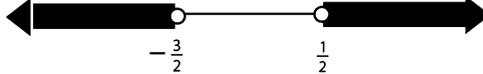
C. (2) dan (4)

3. Jika $p > -3$ dan $q > 5$, maka nilai $q - p$ adalah
- A. lebih besar daripada 9 D. lebih kecil daripada 2
 B. lebih besar daripada 7 E. lebih kecil daripada -2
 C. lebih kecil daripada 8
4. P, Q dan R memancing ikan. Jika hasil Q lebih sedikit dari hasil R, sedangkan jumlah hasil P dan Q lebih banyak dari pada dua kali hasil R, maka yang terbanyak mendapat ikan adalah
- A. P dan R D. Q
 B. P dan Q E. R
 C. P

SOAL LATIHAN - 2

5. Himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $5x - 5 < 7x + 3$, x bilangan rasional adalah
- A. $\{x \mid x < -4\}$ D. $\{x \mid x < 4\}$
 B. $\{x \mid x > 4\}$ E. $\{x \mid x > \frac{2}{3}\}$
 C. $\{x \mid x > -4\}$
6. Jika pertidaksamaan $2x - 3a > \frac{3x-1}{2} + ax$ mempunyai penyelesaian $x > 5$, maka nilai a adalah
- A. $-\frac{3}{4}$ D. $\frac{1}{4}$
 B. $-\frac{3}{8}$ E. $\frac{3}{4}$
 C. $-\frac{3}{8}$
7. Himpunan jawab pertidaksamaan $x^2 + x - 2 \geq 0$ adalah
- A. $\{x \mid x \leq -2 \text{ atau } x \geq 1\}$
 B. $\{x \mid x \geq -2 \text{ atau } x \geq 1\}$
 C. $\{x \mid -2 \leq x \leq 1\}$
 D. $\{x \mid -1 \leq x \leq 2\}$
 E. $\{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 2\}$

8. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $6x^2 + x - 2 > 0$ dinyatakan dengan bagian tebal pada garis bilangan

- A. 
- B. 
- C. 
- D. 
- E. 

9. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $(x + 5) x \leq 2(x^2 + 2)$ adalah

- A. $\{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq -1\}$ D. $\{x \mid -4 \leq x \leq 1\}$
 B. $\{x \mid x \leq -1 \text{ atau } x \geq 4\}$ E. $\{x \mid x \leq 4\}$
 C. $\{x \mid 1 \leq x \leq 4\}$

10. Jika himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan $x^2 - ax - b < 0$, untuk $x \in \mathbb{R}$, adalah $-1 < x < 6$, maka nilai $a - b = \dots$

- A. 1 D. -1
 B. 2 E. -2
 C. 3

11. Solusi pertaksamaan $2x^2 + 3x - 9 \leq 0$ yang bukan solusi dari pertaksamaan $2x^2 - x - 10 \geq 0$ adalah

- A. $-3 < x < -2$ D. $-2 < x < 1 \frac{1}{2}$
 B. $-3 < x < 1 \frac{1}{2}$ E. $x \leq -2 \text{ atau } x \geq 2 \frac{1}{2}$
 C. $1 \frac{1}{2} < x < 2 \frac{1}{2}$

12. Jika x dan y memenuhi pertaksamaan $y^2 - 2 < x$ dan persamaan $2y - x + 1 = 0$, maka $x + y$ memenuhi pertaksamaan
- A. $-1 < x + y < 3$
 B. $-1 < x + y < 7$
 C. $-2 < x + y < 7$
 D. $-2 < x + y < 10$
 E. $-10 < x + y < 2$
13. Grafik $y = x^3 - x^2 + 2x + 5$ di bawah grafik $y = 5 - 2x - 5x^2$ untuk
- A. $x < 0$
 B. $0 < x < 2$
 C. $-2 < x < 0$
 D. $x < -2$ atau $-2 < x < 0$
 E. $x < -2$ atau $x > 0$
14. Solusi pertaksamaan $(x^2 + 1)^2 - 12(x^2 + 1) + 20 \leq 0$ adalah
- A. $-4 \leq x \leq -2$ atau $2 \leq x \leq 4$
 B. $-3 \leq x \leq -2$ atau $2 \leq x \leq 3$
 C. $-3 \leq x \leq -1$ atau $1 \leq x \leq 3$
 D. $-1 \leq x \leq 1$
 E. $1 \leq x \leq 4$
15. Jika $(x - 2)(x - 3)(x - 4) > 0$, maka
- A. $x > 2$ atau $x > 3$
 B. $x > 3$
 C. $x < 3$ atau $x < 2$
 D. $3 < x < 4$ atau $x < 2$
 E. $2 < x < 3$ atau $x > 4$
16. Solusi pertaksamaan $(x^2 + 1)^2 - 12(x^2 + 1) + 20 \leq 0$ adalah
- A. $-4 \leq x \leq -2$ atau $2 \leq x \leq 4$
 B. $-3 \leq x \leq -2$ atau $2 \leq x \leq 3$
 C. $-3 \leq x \leq -1$ atau $1 \leq x \leq 3$
 D. $-1 \leq x \leq 1$
 E. $1 \leq x \leq 4$

SOAL LATIHAN - 2

17. Nilai-nilai x yang memenuhi $3 - 3x + 3x^2 - 3x^3 + \dots < 6$ adalah
- A. $x > -1$
 B. $x > -\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{1}{2} < x < 1$
 D. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $0 < x < \frac{1}{2}$
 E. $-\frac{1}{2} < x < 0$ atau $0 < x < 1$

18. Nilai x yang memenuhi pertaksamaan $\frac{x}{x+3} \leq \frac{x+1}{2-x}$ adalah
- A. semua bil real x
 - B. $-3 \leq x \leq 2$
 - C. $-3 < x < 2$
 - D. $x < -3$ atau $x > 2$
 - E. $x < 0$ atau $x > 2$
19. Solusi pertaksamaan $\frac{(x-2)(x^2+x-6)}{x^2+x-20} > 0$ adalah
- A. $x < -5$ atau $-3 < x < 2$
 - B. $x < -3$ atau $2 < x < 4$
 - C. $-5 < x < -3$ atau $x > 2$
 - D. $-5 < x < -3$ atau $x > 4$
 - E. $-3 < x < 2$ atau $x > 4$
20. Agar pecahan $\frac{x^2+7x+10}{x^2-3x+5}$ bernilai positif, maka
- A. $x < -3$ atau $x > 5$
 - B. $x < -5$ atau $x > 3$
 - C. $x < -3$ atau $x > -2$
 - D. $x < 2$ atau $x > 5$
 - E. $x < -5$ atau $x > -2$
21. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $\frac{(x-1)(2x+4)}{(x^2+4)} < 1$ adalah
- A. $\{x \mid x > 2\}$
 - B. $\{x \mid x < -4\}$
 - C. $\{x \mid x < 2\}$
 - D. $\{x \mid x > -4\}$
 - E. $\{x \mid -4 < x < 2\}$
22. Penyelesaian pertaksamaan $\frac{x+3}{x-1} \geq x$ adalah
- A. $x \leq -1$ atau $1 < x \leq 3$
 - B. $x < -1$ atau $3 \leq x$
 - C. $x < -1$ atau $x > 1$
 - D. $x \geq 3$ atau $-1 < x < 1$
 - E. $-1 < x < 1$ atau $1 < x \leq 3$

23. $\frac{2x^2+5x-3}{4x^2+2x-6} < 0$ berlaku untuk

A. $\frac{1}{2} < x < 1$

D. $x < -3$ atau $x < -\frac{3}{2}$

B. $-3 < x < 1$

E. $x > 3$ atau $x < -\frac{3}{2}$

C. $-3 < x < -\frac{3}{2}$ atau $\frac{1}{2} < x < 1$

24. Jika $2 < a < 3$, maka semua nilai x yang memenuhi pertidaksamaan

$\frac{(1-x)(x+2)}{-ax^2+2x-4} < 0$ adalah

A. $x < -2$ atau $x > -1$

D. $-2 < x < 1$

B. $x < -1$ atau $x > 2$

E. $-1 < x < 2$

C. $-2 < x < -1$

25. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $x(x+1) + \frac{12}{x(x+1)} \leq 8$ adalah

A. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$

B. $\{x \mid 2 \leq x \leq 6\}$

C. $\{x \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ atau } x \geq 2\}$

D. $\{x \mid 1 \leq x \leq 2 \text{ atau } x \geq -3\}$

E. $\{x \mid -3 \leq x \leq -2 \text{ atau } -1 < x < 0 \text{ atau } 1 \leq x \leq 2\}$

SOAL LATIHAN - 2

26. Batas-batas nilai x yang memenuhi pertaksaman

$\sqrt{4-3x} - \sqrt{x+2} < 0$ adalah

A. $x < \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2} < x \leq \frac{4}{3}$

B. $x \geq \frac{4}{3}$

E. $-2 < x < \frac{4}{3}$

C. $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{3}$

27. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{6+x-x^2} < 2$ adalah
- A. $-2 \leq x \leq -1$ D. $-1 < x \leq 3$
 B. $-2 \leq x < -1$ atau $2 < x \leq 3$ E. $-1 \leq x \leq 3$ dan $x = -2$
 C. $-2 < x < -1$
28. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $\sqrt{x-1} > x-3$ adalah
- A. $\{x \mid -2 \leq x < -1 \text{ atau } x > 2\}$ D. $\{x \mid 1 \leq x < 5\}$
 B. $\{x \mid 2 < x \leq 3 \text{ atau } x > 5\}$ E. $\{x \mid x < 5\}$
 C. $\{x \mid 2 < x < 5\}$

SOAL LATIHAN - 5

29. Nilai x yang memenuhi pertaksamaan $|3x + 1| < 2|x - 6|$ adalah
- A. $x < -13$ atau $x > \frac{11}{5}$ D. $-13 < x < 13$
 B. $x < -\frac{11}{5}$ atau $x > 13$ E. $-13 < x < \frac{11}{5}$
 C. $-\frac{11}{5} < x < 13$
30. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $x^2 - |x| \leq 6$ adalah
- A. $\{x \mid -2 \leq x \leq 3\}$ D. $\{x \mid -3 \leq x \leq 3\}$
 B. $\{x \mid -3 \leq x \leq 2\}$ E. $\{x \mid 0 \leq x \leq 3\}$
 C. $\{x \mid -2 \leq x \leq 2\}$
31. Nilai x yang memenuhi $|-x^2 + 2x - 2| < 2$ adalah
- A. $x < 2$ D. $0 < x < 2$
 B. $x > 0$ E. $-2 < x < 2$
 C. $-2 < x < 0$
32. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\left| \frac{5}{4x-3} \right| \leq 1$ adalah
- A. $-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$ atau $x \geq 2$ D. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $x > \frac{3}{4}$
 B. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $\frac{3}{4} < x \leq 2$ E. $x \leq -\frac{1}{2}$ atau $x \geq 2$
 C. $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2, x \neq \frac{3}{4}$

38. Penyelesaian pertaksamaan $x^2 - 2 \leq |2x + 1|$ adalah
- A. $-1 - \sqrt{2} \leq x \leq 3$ D. $-1 \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$
 B. $-1 - \sqrt{2} \leq x \leq -1 + \sqrt{2}$ E. $-1 \leq x \leq 3$
 C. $-1 - \sqrt{2} \leq x < -\frac{1}{2}$
39. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $\frac{2}{x+1} \leq |x|$ adalah
- A. $\{x \mid x \leq -2 \text{ atau } x \geq 1\}$ D. $\{x \mid x < -1 \text{ atau } x \geq 1\}$
 B. $\{x \mid x \leq -2 \text{ atau } 0 \leq x \leq 1\}$ E. $\{x \mid -1 < x \leq 1\}$
 C. $\{x \mid x > -1\}$
40. Jika $x \geq 1$ dan $x|x - 1| + |x|(x - 1) \leq 2x$, maka x harus memenuhi
- A. $x \geq 2$ D. $1 \leq x \leq 2$
 B. $x \geq 3$ E. $1 \leq x \leq 4$
 C. $0 \leq x \leq 2$



SUKU BANYAK

10

A NILAI DAN FAKTOR SUKU BANYAK

a. Pendahuluan

Suku Banyak (polinomial) dalam x berderajat n adalah

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

untuk $n \in$ bilangan cacah dan $a_n \neq 0$.

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$ konstanta, masing-masing merupakan koefisien dari $x^n, x^{n-1}, \dots, x^2, x^1, x^0$.
- **Derajat suatu suku banyak** dalam x dinyatakan oleh **pangkat tertinggi (n)** dalam suku banyak tersebut.

h. Nilai dan Faktor Suku Banyak

- Nilai suku banyak $f(x)$ pada $x = a$ adalah fA .
- Jika $fA = 0 \rightarrow x = a$ adalah akar $f(x)$ dan $(x - a)$ adalah faktor dari $f(x)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN – 1

1. Diketahui fungsi $f(x) = 2x^3 - kx^2 + x + 16$. Jika $f(1) = 9$, nilai k adalah
- A. 16
B. 10
C. 9
- D. 8
E. 4

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow P(x) = 2x^3 - kx^2 - x + 16$$

$$\Leftrightarrow \text{Sisa jika } P(x) \text{ dibagi } (x - 1)$$

$$9 = P(1)$$

$$9 = 2(1)^3 - k(1)^2 + (1) + 16$$

$$9 = 19 - k \rightarrow k = 10$$

2. Suku banyak $x^9 - x$ difaktorkan menjadi suku banyak dengan derajat sekecil-kecilnya dan koefisiennya bilangan bulat. Banyak faktor tersebut adalah
- A. 9
B. 5
C. 4
- D. 3
E. 2

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow (x^9 - x)$$

$$= x(x^8 - 1)$$

$$= x(x^4 + 1)(x^4 - 1)$$

$$= x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x^2 - 1)$$

$$= x(x^4 + 1)(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1)$$

\Leftrightarrow Jadi suku banyak tersebut memiliki faktor sebanyak 5 buah.

3. Pecahan $\frac{2x^2 + ax - 15}{x^2 - 5x + 6}$ dapat disederhanakan, bila pada a diberikan nilai
- A. -2
B. -1
C. 0
- D. 1
E. 2

Jawaban: D

⇔ Misal, $f(x) = 2x^2 - ax - 15$

$$g(x) = x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

⇔ Bentuk di atas dapat disederhanakan apabila fungsi $g(x)$ merupakan faktor dari fungsi $f(x)$, sehingga:

$$f(2) = 0 \quad \rightarrow 2(2)^2 + a(2) - 15 = 0$$

$$\rightarrow a = 3\frac{1}{2}$$

$$f(3) = 0 \quad \rightarrow 2(3)^2 + a(3) - 15 = 0$$

$$\rightarrow a = 1$$

⇔ Nilai a yang memenuhi adalah 1 dan $3\frac{1}{2}$

4. Jika salah satu akar suku banyak $f(x) = 0$ adalah a , maka salah satu akar $(x^2 + 3x + 6).f(x+2) = 0$ adalah

A. $a + 2$

D. $2a$

B. $a + 3$

E. $a - 2$

C. $a - 3$

Jawaban: E

⇔ a adalah akar $f(x) = 0 \rightarrow f(a) = 0$

⇔ $(x^2 + 3x + 6).f(\underbrace{x+2}_a) = 0$

Dari persamaan di atas diperoleh:

$$x + 2 = a \rightarrow x = (a - 2)$$

5. Suku banyak yang akarnya $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ adalah

A. $x^4 - 14x^2 - 9$

D. $x^4 - 14x^2 + 89$

B. $x^4 - 14x^2 + 9$

E. $x^4 + 14x^2 + 89$

C. $x^4 - 14x^2 + 9$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2} + \sqrt{5}$$
$$x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{5})^2 = 7 + 2\sqrt{10}$$
$$x^4 = (7 + 2\sqrt{10})^2 = 89 + 28\sqrt{10} \dots(1)$$
$$14x^2 = 89 + 28\sqrt{10} \dots(2)$$

\Leftrightarrow Jika pers (1) \rightarrow pers (2), maka:
 $x^4 - 14x^2 = -9 \rightarrow x^4 - 14x^2 + 9 = 0$

\Leftrightarrow Jadi, suku banyak yang mempunyai akar $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ adalah $x^4 - 14x^2 + 9 = 0$

6. Bila $x - y + 1$ merupakan sebuah faktor dari bentuk $(ax^2 + bxy + cy^2 + 5x - 2y + 3)$, maka harga a , b , dan c berturut-turut adalah

- A. 2, -1, 1
- B. 2, -1, -1
- C. -2, 1, 1
- D. -2, -1, 1
- E. 2, 1, -1

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow f(x) = ax^2 + bxy + cy^2 + 5x - 2y + 3$$

$\{x - (y-1)\}$ faktor dari $f(x)$, maka

$$f(y-1) = 0$$
$$a(y-1)^2 + by(y-1) + cy^2 + 5(y-1) - 2y + 3 = 0$$
$$ay^2 - 2ay + a + by^2 - by + cy^2 + 5y - 5 - 2y + 3 = 0$$
$$(a+b+c)y^2 - (2a+b-3)y + (a-2) = 0$$

\Leftrightarrow Persamaan tersebut bernilai nol jika:

$$\underbrace{(a+b+c)}_0^{(3)} y^2 - \underbrace{(2a+b-3)}_0^{(2)} y + \underbrace{(a-2)}_0^{(1)} = 0$$

- (1) $\rightarrow (a-2) = 0 \rightarrow a = 2$
- (2) $\rightarrow 2a + b - 3 = 0$
 $2(2) + b - 3 = 0 - b = -1$
- (3) $\rightarrow a + b + c = 0$
 $2 - 1 + c = 0 - c = -1$

\Leftrightarrow Nilai $a = 2$, $b = -1$ dan $c = -1$

B. PEMBAGIAN SUKU BANYAK

Jika suatu suku banyak $f(x)$ dibagi $p(x)$, maka akan menghasilkan hasil bagi $h(x)$ dan sisa $s(x)$ yang dapat dirumuskan sebagai berikut: $f(x) = p(x) \cdot h(x) + s(x)$

a. Pembagian Biasa

Ilustrasi: Misal suku banyak $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dibagi oleh $(x-h)$

$$\begin{array}{r}
 ax^2 + (b+ah)x + (c+bh+ah^2) \rightarrow \text{(hasil bagi)} \\
 (x-h) \overline{ax^3 + bx^2 + cx + d} \\
 \underline{ax^3 - ahx^2} \\
 (b+ah)x^2 + cx + d \\
 \underline{(b+ah)x^2 - (bh+ah^2)x} \\
 (c+bh+ah^2)x + d \\
 \underline{(c+bh+ah^2)x - (ch+bh^2+ah^3)} \\
 \text{(sisa pembagian)} \rightarrow (d+ch+bh^2+ah^3)
 \end{array}$$

Dari proses pembagian di atas diperoleh:

- Hasil baginya : $ax^2 + (b+ah)x + (c+bh+ah^2)$
- Sisa pembagian : $(d+ch+bh^2+ah^3)$

h. Pembagian Sintetik Horner

Ilustrasi: Misal suku banyak $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ dibagi oleh $(x-h)$

$$\begin{array}{r}
 x = h \quad \left| \begin{array}{cccc}
 a & b & c & d \\
 & ah & (ah+bh) & (ah^3+bh^2+ch) \\
 \hline
 a & (ah+b) & (ah^2+bh+c) & ah^3+bh^2+ch+d
 \end{array} \right. + \\
 \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{koefisien suku-suku hasil bagi}} & & \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{sisa pembagian}}
 \end{array}$$

Dari proses pembagian di atas diperoleh:

- Hasil baginya : $ax^2 + (b+ah)x + (c+bh+ah^2)$
- Sisa pembagian : $(d+ch+bh^2+ah^3)$

C. TEOREMA SISIA

Jika suku banyak $f(x)$ dibagi $(x - a)$, maka sisanya dapat dicari dari nilai $f(a)$.

- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)$, maka **sisa (S)** = $f(a)$.
- Jika $f(x)$ dibagi $(ax - b)$, maka **sisa (S)** = $f\left(\frac{b}{a}\right)$
- Jika $f(x)$ dibagi $(x - a)(x - b)$, maka **sisa (S)** = $\frac{(x-a)}{b-a}f(b) + \frac{(x-b)}{a-b}f(a)$

catatan: Jika pembagi $f(x)$ adalah $p(x)$ berderajat n , maka sisa dari S berderajat maksimal $(n-1)$

CUNTOH SUAL & PEMBAHASAN – 1

7. Hasil bagi dan sisa pembagian suku banyak $4x^3 - 2x^2 + x - 1$ dibagi $2x^2 + x + 1$ berturut-turut adalah
- A. $2x - 1$ dan $x - 1$ D. $2x - 2$ dan $-x - 1$
 B. $2x - 1$ dan $x + 1$ E. $2x - 2$ dan $x + 1$
 C. $2x - 1$ dan $2x - 1$

Jawaban: E

$$\begin{array}{r}
 \Leftrightarrow \qquad 2x - 2 = \text{hasil bagi} \\
 2x^2 + x + 1 \overline{) 4x^3 - 2x^2 + x - 1} \\
 \underline{4x^3 + 2x^2 + 2x} \quad - \\
 -4x^2 - x - 1 \\
 \underline{-4x^2 - 2x - 2} \quad + \\
 x + 1 = \text{sisa}
 \end{array}$$

8. Jika suku banyak $2x^3 - 5x^2 - kx + 18$ dibagi $x - 1$ mempunyai sisa 5, maka nilai k adalah
- A. -15 D. 5
 B. -10 E. 10
 C. 0

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 - kx + 18$$

$$\Leftrightarrow \text{Sisa} = f(1)$$

$$5 = 2(1)^3 - 5(1)^2 - k(1) + 18$$

$$5 = 2 - 5 - k + 18$$

$$k = 10$$

9. Diketahui suku banyak $P(x) = 2x^4 + ax^3 - 3x^2 + 5x + b$. Jika $P(x)$ dibagi $(x - 1)$ sisa 11, dibagi $(x + 1)$ sisa -1 , maka $(2a + b) = \dots$

A. 13

D. 7

B. 10

E. 6

C. 8

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \bullet \quad P(1) = 11$$

$$2 + a - 3 + 5 + b = 11$$

$$a + b = 7 \quad \dots(1)$$

$$\bullet \quad P(-1) = -1$$

$$2 - a - 3 - 5 + b = -1$$

$$-a + b = 5 \quad \dots(2)$$

Jika pers (1) + (2), diperoleh:

$$2b = 12 - b = 6 \text{ dan } a = 1$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } (2a + b) = 2 + 6 = 8$$

10. Jika suku banyak $2x^3 - px^2 + qx + 6$ dan $2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$ mempunyai sisa sama apabila dibagi oleh $(x + 1)$, maka nilai $(p + q) = \dots$

A. -2

D. 1

B. -1

E. 2

C. 0

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \text{misal: } f(x) = 2x^3 - px^2 + qx + 6$$

$$g(x) = 2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$$

\Leftrightarrow Jika $f(x)$ dan $g(x)$ dibagi $(x + 1)$ memberikan sisa sama, maka:

$$f(-1) = g(-1)$$

$$= -2 - p - q + 6 = -2 + 3 + 4 - 1$$

$$p + q = 0$$

11. Diketahui $P(x) = ax^5 + bx - 1$, dengan a dan b konstan. Jika $P(x)$ dibagi dengan $(x - 2010)$ bersisa 6. Jika $P(x)$ dibagi dengan $(x + 2010)$ akan bersisa
- A. -8
B. -2
C. -1
D. 1
E. 8

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow P(x) = ax^5 + bx - 1$$

$$P(x) \text{ dibagi } (x - 2010) \rightarrow \text{sisa} = 6$$

$$\text{Sisa} = P(2010)$$

$$6 = a(2010)^5 + b(2010) - 1 \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow \text{Sisa jika } P(x) \text{ dibagi } (x + 2010)$$

$$= P(-2010)$$

$$= a(2010)^5 + b(2010) - 1$$

$$= -\left\{ \underbrace{a(2010)^5 + b(2010) - 1}_6 \right\} - 2$$

$$= -8$$

12. Suku banyak $f(x)$ dibagi $(x + 1)$ sisanya 10 dan jika dibagi $(2x - 3)$ sisanya 5. Jika suku banyak $f(x)$ dibagi $(2x^2 - x - 3)$, sisanya adalah
- A. $-2x + 8$
B. $-2x + 12$
C. $-x + 4$
D. $-5x + 5$
E. $-5x + 15$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow f(x): (x + 1) \text{ sisanya} \rightarrow S = f(-1) = 10$$

$$f(x): (2x - 3) \text{ sisanya} \rightarrow S = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$$

$$f(x) = p(x) \cdot h(x) + S$$

$$f(x) = (x + 1)(2x - 3) \cdot h(x) + (px + q)$$

$$S = f(-1) = 10 = -p + q \quad \dots(1)$$

$$S = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5 = \left(\frac{3}{2}\right)p + q \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Jika pers (1) - (2)} \rightarrow p = -2 \text{ dan } q = 8$$

$$\Leftrightarrow \text{Sisa pembagiannya adalah } -2x + 8$$

13. Diketahui $p(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2).q(x) + ax + b$ dengan $q(x)$ suatu suku banyak. Jika $p(x)$ dibagi dengan $(x + 1)$ bersisa 10 dan jika dibagi dengan $(x - 1)$ bersisa 20, maka jika $p(x)$ dibagi dengan $(x - 2)$ bersisa
- A. -10
B. 0
C. 5
D. 15
E. 25

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow p(x) = (x - 1)(x^2 - x - 2)q(x) + (ax + b)$$

$$= (x - 1)(x - 2)(x + 1)q(x) + (ax + b)$$

$$\Leftrightarrow p(-1) = 10 \rightarrow -a + b = 10$$

$$p(1) = 20 \rightarrow \frac{a + b = 20}{2b = 30}$$

$$b = 15$$

maka, $a = 5$

$$\Leftrightarrow \text{Sisa} = ax + b$$

$$p(2) = 5(2) + 15 = 25$$

14. Suku banyak $f(x)$ dibagi $(x - 2)$ sisa 1, dibagi $(x + 3)$ sisa -8 . Suku banyak $g(x)$ dibagi $(x - 2)$ sisa 9, dibagi $(x + 3)$ sisa 2. Jika $h(x) = f(x).g(x)$, maka sisa pembagian $h(x)$ dibagi $x^2 + x - 6$ adalah
- A. $7x - 1$
B. $6x - 1$
C. $5x - 1$
D. $4x - 1$
E. $3x - 1$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow f(x): (x - 2) \rightarrow \text{sisa} = f(2) = 1$$

$$f(x): (x + 3) \rightarrow \text{sisa} = f(-3) = -8$$

$$g(x): (x - 2) \rightarrow \text{sisa} = g(2) = 9$$

$$g(x): (x + 3) \rightarrow \text{sisa} = g(-3) = 2$$

$$\Leftrightarrow h(x): \text{sisa} = ax + b$$

$$h(x): (x - 2) - \text{sisa} = f(2).g(2)$$

$$\text{sisa} = (1)(9) = 9$$

$$9 = 2a + b \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}h(x): (x+3) - \text{sisas} &= f(-3) \cdot g(-3) \\ \text{sisas} &= (-8)(2) = -16 \\ -16 &= -3a + b \quad \dots(2)\end{aligned}$$

Jika pers (1) – (2), diperoleh:

$$25 = 5a - a = 5 \text{ dan } b = -1$$

⇔ Jadi, sisa pembagian $h(x)$ dibagi $x^2 + x - 6$ adalah $(5x - 1)$

15. Diketahui $g(x) = ax^2 - bx + (a - b)$ habis dibagi $(x - 1)$. Jika $f(x)$ adalah suku banyak yang bersisa a ketika dibagi $(x - 1)$ dan bersisa $3ax + b^2 + 1$ ketika dibagi $g(x)$, maka nilai a adalah
- | | |
|-------|------|
| A. -1 | D. 2 |
| B. -2 | E. 3 |
| C. 1 | |

Jawaban: A

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \text{ habis dibagi } (x - 1) \\ g(1) &= 0 \rightarrow a - b + a - b = 0 \\ 2a - 2b &= 0 \rightarrow a = b \quad \dots(1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & f(x): (x - 1) - \text{sisas} = a \\ f(x): g(x) & \rightarrow \text{sisas} = 3ax + b^2 + 1 \\ & a = 3ax + b^2 + 1 \\ & 0 = b^2 + 2b + 1 \\ 0 &= (b + 1)^2 \rightarrow b = -1 = a\end{aligned}$$

16. Jika $x^4 + ax^3 + (b - 10)x^2 + 15x - 6 = f(x)(x - 1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $(x - 1)$, maka nilai b adalah
- | | |
|------|-------|
| A. 2 | D. -1 |
| B. 1 | E. -2 |
| C. 0 | |

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \underbrace{x^4 + ax^3 + (b - 10)x^2 + 15x - 6}_{P(x)} = \underbrace{f(x)(x - 1)}_{Q(x)} \\ f(x) & \text{ habis dibagi } (x - 1), \text{ maka:} \\ Q(x) &= \underbrace{(x - 1) \cdot H(x)}_{f(x)} \cdot (x - 1) \\ Q(x) &= \underbrace{(x^2 - 2x + 1)}_{\text{harus sama dengan } R(x)} \cdot (x^2 + 3x - 6)\end{aligned}$$

⇔ Perhatikan koefisien pada $Q(x)$

• $a ax^3 = (3-2)x^3 \rightarrow a = 1$

• $(b-10)x^2 = (-6-6+1)x^2 \rightarrow b = -1$

17. Jika suku banyak $f(x)$ habis dibagi oleh $(x-1)$, maka sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x-1)(x+1)$ adalah

A. $\frac{-f(-1)}{2}(1+x)$

D. $\frac{f(-1)}{2}(1-x)$

B. $\frac{-f(-1)}{2}(1-x)$

E. $\frac{f(-1)}{2}(x-1)$

C. $\frac{f(-1)}{2}(1+x)$

Jawaban: D

⇔ $f(x) = p(x) \cdot h(x) + S(x)$

$f(x) = (x-1)(x+1) \cdot h(x) + (ax+b)$

$f(1) = 0 \rightarrow 0 = a + b \rightarrow a = -b$

$f(-1) = -a + b \rightarrow f(-1) = 2b$

$$\rightarrow b = \frac{1}{2}f(-1)$$

$$a = -b = -\frac{1}{2}f(-1)$$

⇔ Sisa pembagian = $ax + b$

$$= -\frac{1}{2}f(-1)x + \frac{1}{2}f(-1)$$

$$= \frac{1}{2}f(-1)(-x + 1)$$

$$= \frac{1}{2}f(1)(1-x)$$

SOLUSI SMART!

Jika $f(x)$ habis dibagi $(x-a)$, maka sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x-a)(x-b)$ adalah

$$S = \frac{f(b)}{(b-a)}(x-a)$$

⇔ Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x-1)(x+1)$

$$= \frac{f(-1)}{(-1-1)}(x-1)$$

$$= -\frac{f(-1)}{2}(x-1) = \frac{f(-1)}{2}(1-x)$$

D. OPERASI AKAR—AKAR SUKU BANYAK

a. Akar-akar Suku Banyak

- Nilai x yang memenuhi suku banyak: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ adalah akar-akar suku banyak tersebut.
- Untuk mencari akar-akar suku banyak dapat dilakukan dengan cara faktorisasi.
- Dalam proses faktorisasi bisa dibantu oleh sistem pembagian cara HORNER

b. Operasi Akar-akar Suku Banyak

Persamaan: $ax^2 + bx + c = 0$

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Persamaan: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$

- $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{c}{a}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}$$

Persamaan: $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

$$\bullet x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_4 + x_3 \cdot x_4 = \frac{c}{a}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 = -\frac{d}{a}$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN — 3

18. Akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + ax + 72 = 0$ adalah x_1, x_2 . Jika salah satu akarnya adalah 3 dan $x_1 < x_2 < x_3$, maka $x_3 - x_2 - x_1 = \dots$

A. -13

D. 5

B. -7

E. 7

C. -5

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow x = 3 \rightarrow (3)^3 - (3)^2 + 3a + 72 = 0$$

$$3a = -90$$

$$a = -30$$

$$\Leftrightarrow \text{Persamaannya adalah } x^3 - x^2 - 30x + 72 = 0$$

$$x = 3 \quad \left| \begin{array}{cccc} 1 & -1 & -30 & 72 \\ & 3 & 6 & -72 \\ \hline 1 & 2 & -24 & 0 \end{array} \right. +$$

$$(x - 3)(x^2 + 2x - 24) = 0$$

$$(x - 3)(x + 6)(x - 4) = 0$$

$$x_1 = -6, x_2 = 3, \text{ dan } x_3 = 4$$

$$\Leftrightarrow x_3 - x_2 - x_1 = 4 - 3 - (-6) = 7$$

19. Jika $x = -2$ adalah akar dari persamaan $x^3 + 4x^2 + 7x + k = 0$, maka nilai dari $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \dots$

- A. -2
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. 2

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow x^3 + 4x^2 + 7x + k = 0$$

$$x = -2 \rightarrow (-2)^3 + 4(-2)^2 + 7(-2) + k = 0$$

$$-8 + 16 - 14 + k = 0$$

$$k = 6$$

$$\Leftrightarrow \text{Dari pers } x^3 + 4x^2 + 7x + 6 = 0$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= (-4)^2 - 2(7) = 2$$

20. Jumlah semua solusi riil dari persamaan $x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 39x^2 - 54x = 0$ adalah

- A. -4
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. 4

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^5 - 4x^4 - 2x^3 + 39x^2 - 54x = 0$$

$$x(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 39x - 54) = 0$$

$x=2$	1	-4	-2	39	-54	
		2	-4	-12	54	
$x=3$	1	-2	-6	27	0	
		-3	15	-27		
	1	-5	9	0		+

$$\Leftrightarrow x(x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 39x - 54) = 0$$

$$x \underbrace{(x-2)(x+3)}_{\text{akar real}} \underbrace{(x^2 - 5x + 9)}_{\substack{D < 0 \\ \text{akar khayal}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi jumlah akar real} = x_1 + x_2 + x_3 \\ = 0 + 2 - 3 = -1$$

21. Jika akar-akar persamaan suku banyak $x^4 - 8x^3 + 2ax^2 + (5b+3)x + 4c - 3 = 0$ diurutkan menurut nilainya dari yang terkecil ke yang terbesar, maka terbentuk barisan aritmatika dengan beda 2. Nilai $a+b+c = \dots$

- A. -3
 B. 1
 C. 3
 D. 5
 E. 6

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 2ax^2 + (5b + 3)x + 4c - 3 = 0 \quad \dots(1)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} = 8$$

$$p + (p + 2) + (p + 4) + (p + 6) = 8$$

$$p = -1$$

untuk $p = -1$, akar-akar adalah $-1, 1, 3, \text{ dan } 5$, sehingga persamaan suku banyaknya menjadi:

$$(x + 1)(x - 1)(x - 3)(x - 5) = 0$$

$$(x^2 - 1)(x^2 - 8x + 15) = 0$$

$$x^4 - 8x^3 + 14x^2 + 8x - 15 = 0 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Persamaan (1) = (2), sehingga diperoleh

$$\bullet 2a = 14 \quad \rightarrow a = 7$$

$$\bullet 5b + 3 = 8 \quad \rightarrow b = 1$$

$$\bullet (4c - 3) = -15 \quad \rightarrow c = -3$$

\Leftrightarrow Nilai $(a + b + c) = 7 + 1 - 3 = 5$

LATIHAN SOAL 10

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN – 1

1. Diketahui suku banyak $f(x) = 2x^5 - 3x^4 - 2x^3 + ax^2 - 7x - 3$ dan $f(-1) = 6$. Nilai $f(-2)$ adalah
A. -81
B. -65
C. 62
D. 65
E. 81
2. Diketahui $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$. Jika $f(1) = f(2) = 0$ dan $g(x) = x^2 - (a + b)x + ab$, maka $g(-1) = \dots$
A. 0
B. 6
C. -2
D. -1
E. -6
3. Jika suku banyak $4x^4 - 12x^3 - 8x + a$ dan $6x^2 - 11x + 4$ mempunyai satu faktor, maka nilai a yang memenuhi adalah
A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

4. Diketahui persamaan $\frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x+1} = \frac{6x^2 - 7x - 1}{(x^2 - 1)(x - 2)}$. Nilai $a + b + c$ sama dengan
- A. 1
B. 3
C. 5
D. 6
E. 8
5. Suku banyak yang akarnya $\sqrt{7 - 2\sqrt{10}}$ adalah
- A. $x^4 - 14x^2 + 9$
B. $x^4 - 14x^2 - 9$
C. $x^4 + 14x^2 + 9$
D. $x^4 - 14x^2 + 89$
E. $x^4 + 14x^2 + 89$
6. Jika $f(x) = -x^n(x-1)^n$, maka $f(x^2) + f(x)f(x+1)$ adalah
- A. $-(x+1)^n x^n$
B. $(x^2-1)^n - x^n(x-1)^n$
C. $-x^{2n}(x^2-1)^n - \{-(x+1)^n x^n\}$
D. 0
E. 1

SOAL LATIHAN — 2

7. Hasil bagi dan sisa suku banyak dibagi berturut-turut adalah
- A. $3x - 14$ dan $-16x + 76$
B. $3x + 14$ dan $16x + 76$
C. $3x + 14$ dan $-68x + 76$
D. $3x + 14$ dan $-8x - 4$
E. $3x - 4$ dan $-14x + 26$
8. Suku banyak berderajat 3, jika dibagi $(x^2 + x - 2)$ bersisa $(2x - 1)$, jika dibagi $(x^2 + x - 3)$ bersisa $(3x - 3)$. Suku banyak tersebut
- A. $x^3 - x^2 - 2x - 3$
B. $x^3 - x^2 - 2x + 3$
C. $x^3 - x^2 + 2x + 3$
D. $x^3 - 2x^2 - x + 2$
E. $x^3 - 2x^2 + x - 2$
9. $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 2ax^2 + 2a^2$ habis dibagi dengan $(x - 4)$ untuk $a = \dots$
- A. 8
B. 4
C. 2
D. -2
E. -4

10. Jika $x^3 - 12x + k$ habis dibagi $(x - 2)$, maka ia juga habis dibagi dengan
- A. $(x - 1)$ D. $(x - 3)$
B. $(x + 1)$ E. $(x + 4)$
C. $(x + 2)$
11. Diketahui $(x + 1)$ salah satu faktor dari suku banyak $f(x) = 2x^4 - 2x^3 + px^2 - x - 2$. Salah satu faktor yang lain adalah
- A. $(x - 2)$ D. $(x - 3)$
B. $(x + 2)$ E. $(x + 3)$
C. $(x - 1)$
12. Suku banyak $f(x) = 2x^3 + px^2 + 10x + 3$ habis dibagi $(x + 1)$. Salah satu faktor linear lainnya adalah
- A. $x - 3$ D. $2x + 3$
B. $x + 1$ E. $3x + 2$
C. $2x + 1$
13. Jika suku banyak $ax^3 + 2x^2 + 5x + b$ dibagi $(x^2 - 1)$ menghasilkan sisa $(6x + 5)$, maka $a + 3b = \dots$
- A. 15D. 8
B. 12E. 5
C. 10
14. Suku banyak $(2x^3 + 5x^2 + ax + b)$ dibagi $(x + 1)$ sisanya 1 dan jika dibagi $(x - 2)$ sisanya 43. Nilai dari $a + b = \dots$
- A. -4D. 2
B. -2E. 4
C. 0
15. Bila $x^3 - 4x^2 + 5x + p$ dan $x^2 + 3x - 2$ dibagi oleh $(x + 1)$ memberikan sisa sama, maka p sama dengan
- A. -6D. 4
B. -4E. 6
C. -2

16. Sisa pembagian suku banyak $(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1)$ oleh $(x^2 - x - 2)$ adalah
- A. $-6x + 5$
 B. $-6x - 5$
 C. $6x + 5$
 D. $6x - 5$
 E. $6x - 6$
17. Diketahui suku banyak $f(x)$ dibagi $(x^2 + 4x + 3)$ bersisa $(2x + 17)$ dan jika dibagi oleh $(x^2 - 4)$ bersisa $(3x - 5)$. Sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x^2 + x - 16)$ adalah
- A. $-2x + 5$
 B. $2x - 5$
 C. $3x + 17$
 D. $3x - 17$
 E. $-3x + 17$
18. Suku banyak $f(x)$ dibagi $(x + 1)$ sisanya -2 dan dibagi $(x - 3)$ sisa 7 , suku banyak $g(x)$ dibagi $(x + 1)$ sisa 3 dan dibagi $(x - 3)$ sisa 2 . Diketahui $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Jika $h(x)$ dibagi $x^2 - 2x - 3$, sisanya adalah
- A. $S(x) = 3x - 1$
 B. $S(x) = 4x - 1$
 C. $S(x) = 5x - 1$
 D. $S(x) = 6x - 1$
 E. $S(x) = 7x + 2$
19. Ditentukan $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$. Jika $g(x)$ dibagi $(x - 2)$ dan $(x + 2)$ sisanya 6 dan 10 sedangkan $h(x)$ dibagi $(x - 2)$ dan $(x + 2)$ sisanya 2 dan 2 . Sisa pembagian jika $f(x)$ dibagi $(x^2 - 4)$ adalah
- A. $x + 4$
 B. $x - 4$
 C. $-x + 8$
 D. $-\frac{1}{2}x + 4$
 E. $\frac{1}{2}x + 4$
20. Diketahui $h(x) = x^2 + 3x - 4$ merupakan salah satu faktor dari $g(x) = x^4 + 2x^3 - ax^2 - 14x + b$. Jika $g(x)$ dibagi dengan $(x + 1)$ akan bersisa
- A. 0
 B. 3
 C. 9
 D. 12
 E. 24

21. Salah satu faktor suku banyak $x^3 + kx^2 + x - 3$ adalah $x - 1$. Faktor yang lain adalah
- A. $x^2 + 3x + 3$
 - B. $x^2 + x - 3$
 - C. $x^2 + 3x - 3$
 - D. $x^2 + 2x + 3$
 - E. $x^2 - 7x + 3$
22. Pada pembagian suku banyak dengan $(3x - p)$ diperoleh sisa $3p^3 + 2$. Jumlah nilai-nilai p yang memenuhi adalah
- A. 2
 - B. 3
 - C. 4
 - D. 5
 - E. 6
23. Diketahui $f(x)$ suku banyak derajat tiga, dengan koefisien x^3 sama dengan 1, yang habis dibagi $(x - 3)$ dan $(x + 1)$. Jika $f(4) = 30$, maka $f(2) = \dots$
- A. -8
 - B. -7
 - C. -12
 - D. 0
 - E. 7
24. Jika $f(x) = ax^3 + 3bx^2 + (2a-b)x + 4$ dibagi dengan $(x - 1)$ sisanya 10, sedangkan jika dibagi dengan $(x + 2)$ sisanya 2. Nilai a dan b berturut-turut adalah
- A. $\frac{4}{3}$ dan 1
 - B. $\frac{3}{4}$ dan 1
 - C. 1 dan $\frac{4}{3}$
 - D. 1 dan $\frac{3}{4}$
 - E. $-\frac{4}{3}$ dan 1
25. Jika $P(x) = x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 13x + a$ dibagi dengan $(x + 3)$ bersisa 2, maka $P(x)$ dibagi $(x + 1)$ akan bersisa
- A. 2
 - B. -3
 - C. 4
 - D. -5
 - E. 6

26. Suku banyak $f(x) = x^3 + ax^2 - bx - 5$ dibagi dengan $(x - 2)$ memberikan hasil bagi $x^2 + 4x + 11$ dan sisa 17. Nilai $a + b = \dots$
- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3
27. Diketahui $f(x)$ suku banyak berderajat tiga, dengan koefisien x^3 sama dengan 1, yang habis dibagi $(x - 3)$ dan $(x + 1)$. Jika $f(4) = 30$, maka $f(2) = \dots$
- A. -8
B. -7
C. -12
D. 0
E. 7
28. Diketahui suku banyak $p(x) = ax^6 + bx^4 + cx - 2007$, dengan a, b , dan c konstan. Jika suku banyak $p(x)$ bersisa -2007 bila dibagi oleh $(x - 2007)$ dan juga bersisa -2007 bila dibagi oleh $(x + 2007)$, maka $c = \dots$
- A. -2007
B. -1
C. 0
D. 10
E. 2007
29. Jika $f(x)$ dibagi dengan $(x - 2)$ sisanya 24, sedangkan jika dibagi dengan $(x + 5)$ sisanya 10. Jika $f(x)$ dibagi dengan $x^2 + 3x - 10$ sisanya adalah \dots
- A. $(x + 34)$
B. $(x - 34)$
C. $(2x + 20)$
D. $(2x - 20)$
E. $(x + 14)$
30. Suku banyak $f(x)$ bila dibagi $(x - a)$ sisanya fA dan apabila $f(x)$ dibagi $(x - b)$ sisanya fB . Sisa $f(x)$ jika dibagi $(x - ab)$ adalah \dots
- A. fB .
B. fA .
C. $f(a + b)$
D. $f(ab)$
E. $fA \cdot fB$.

31. Suku banyak $(x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 13x - 7)$ dibagi $(x + 1)(x - 3)$ menghasilkan sisa
- | | |
|-------------|-------------|
| A. $x - 1$ | D. $2x + 1$ |
| B. $x - 3$ | E. $2x - 3$ |
| C. $2x - 1$ | |
32. Jika $f(x)$ habis dibagi oleh $(x-4)$, sisa pembagian $f(x)$ oleh $x^2 - 7x + 12$ adalah
- | | |
|-------------------|-------------------|
| A. $f(3).(x - 4)$ | D. $f(4).(3 - x)$ |
| B. $f(3).(4 - x)$ | E. $f(3).(x + 4)$ |
| C. $f(4).(x - 3)$ | |
33. Suku banyak berderajat 5, $f(x)$, habis dibagi $x^2 - 1$. Maka sisa pembagian $f(x)$ oleh $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$ adalah
- | | |
|-----------------------------|--------------------------------|
| A. $\frac{1}{3}f(2)(x + 1)$ | D. $\frac{1}{3}f(2)(x^2 - 1)$ |
| B. $\frac{1}{3}f(2)(x - 1)$ | E. $\frac{1}{3}f(-2)(x^2 - 1)$ |
| C. $f(2)$ | |
34. Jika $x^4 + ax^3 + (b - 14)x^2 + 28x - 15 = f(x)(x - 1)$ dengan $f(x)$ habis dibagi $(x - 1)$, maka nilai a adalah
- | | |
|---------|--------|
| A. -4 | D. 2 |
| B. -2 | E. 4 |
| C. 0 | |

SOAL LATIHAN - 3

35. Banyaknya akar-akar real persamaan $x^5 + x^4 - 2x^3 + x^2 + x - 2 = 0$ adalah
- | | |
|------|------|
| A. 1 | D. 4 |
| B. 2 | E. 5 |
| C. 3 | |

36. Diketahui $x = a$ adalah akar dari persamaan $x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 = 0$. Dari nilai-nilai di bawah ini yang bukan merupakan nilai dari a adalah
- A. 3
B. 2
C. 1
D. -1
E. -2
37. Diketahui persamaan $2x^3 - 5x^2 + x + 2 = 0$. Jumlah akar-akarnya adalah
- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{5}{2}$
E. $\frac{7}{2}$
38. Jika akar-akar persamaan $x^3 - 3x^2 - px + 3p = 0$ adalah $2, \alpha,$ dan β , maka nilai $\alpha^2 + \beta^2 = \dots$
- A. 8
B. 10
C. 13
D. 17
E. 20
39. Hasil kali semua nilai x yang memenuhi $4^{\sqrt{x^3+2x^2-3x-6}} - 2^{\sqrt{4x^2+4x-8}} = 0$ adalah
- A. 4
B. 2
C. -2
D. -3
E. -4
40. Jika $x = -2$ akar persamaan $x^3 + 4x^2 + 7x + k = 0$, maka nilai $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \dots$
- A. 8
B. 6
C. 4
D. 2
E. 1

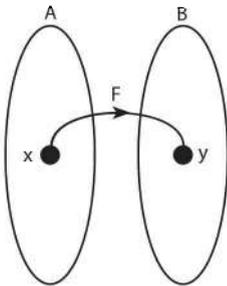


KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

11

A. DAERAH ASAL (DOMAIN) DAN DAERAH HASIL (RANGE) FUNGSI

a. Fungsi



- Suatu **Fungsi f atau pemetaan f** dari himpunan A ke himpunan B adalah suatu relasi khusus yang memetakan setiap elemen dari A (domain) dengan tepat satu elemen dari B (kodomain).
- Jika f memetakan suatu elemen ke suatu elemen, maka fungsi f dari A ke B dapat ditulis sebagai berikut.
 $y = f(x)$ dengan x sebagai *peubah bebas* dan y sebagai *peubah terikat*.

b. Daerah Asal (Domain) Fungsi

Daerah asal (domain) fungsi adalah nilai x agar bernilai (terdefinisi).

Beberapa domain fungsi:

- $y = \sqrt{f(x)}$ → syarat $f(x) \geq 0$

- $y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \rightarrow \text{syarat} \quad g(x) \neq 0$
- $y = f(x) \log g(x) \quad \rightarrow \text{syarat} \quad g(x) > 0 \text{ dan } f(x) > 0, f(x) \neq 1$

c. Daerah Hasil (Range) Fungsi

- **Daerah hasil** fungsi $y = f(x)$ adalah nilai y yang dipengaruhi oleh domain fungsi.
- **Daerah hasil fungsi kuadrat** $y = f(x) = ax^2 + bx + c$
 - **Jika daerah asal $x \in$ bilangan Riil**, maka:
 untuk $a > 0 \rightarrow$ daerah hasil $= R_f = \{y \geq y_e\}$
 untuk $a < 0 \rightarrow$ daerah hasil $= R_f = \{y \leq y_e\}$
 - **Jika daerah asal dalam interval $x_1 \leq x \leq x_2$** , maka tentukan nilai $f(x_1)$, $f(x_2)$ dan $y_e = f(x_e)$ kemudian diperoleh hasil minimum dan maksimum, sehingga daerah hasilnya adalah
 $f_{\text{minimum}} \leq y \leq f_{\text{maksimum}}$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diketahui fungsi:

$$y = f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{untuk } -2 \leq x \leq 0 \\ x^2 + 1, & \text{untuk } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Tentukan nilai dari $f(-2) + f(1) - f(2)$!

Pembahasan:

- \Leftrightarrow • $y = f(x) = x + 1$, untuk $-2 \leq x \leq 0$
 $f(-2) = (-2) + 1 = -1$
- $y = x^2 + 1$, untuk $0 \leq x \leq 2$
 $f(1) = (1)^2 + 1 = 2$
 $f(2) = (2)^2 + 1 = 5$
- $\Leftrightarrow f(-2) + f(1) - f(2) = -1 + 2 + 5 = 6$

2. Diketahui fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 6$. Hitung nilai a yang memenuhi $f(a) = 9!$

Pembahasan:

$$f(a) = 9 \rightarrow a^2 - 2a + 6 = 9$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a-3)(a+1) = 0$$

⇔ Nilai a yang memenuhi adalah 3 dan -1

3. Jika $f(x) = 3^x$, maka untuk setiap x berlaku $f(x + 1) - f(x) = \dots$

- A. $f(x)$ D. $f(x - 1)$
B. $2 f(x)$ E. $3 f(x + 1)$
C. $3 f(x)$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow f(x) = 3^x$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) &= 3^{x+1} - 3^x \\ &= 3 \cdot 3^x - 3^x \\ &= 2 \cdot 3^x \\ &= 2.f(x) \end{aligned}$$

4. Tentukan daerah asal (domain) dari fungsi:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 20}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 8}$

(c) $f(x) = {}^2\log(x^2 - 2x - 15)$

(d) $f(x) = {}^{(x-1)}\log(x+1)$

Pembahasan:

(a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 9x + 20}$

Syarat $f(x)$ terdefinisi:

$$x^2 - 9x + 20 \geq 0 \rightarrow (x - 4)(x - 5) \geq 0$$



- Domain $y = f(x)$ adalah:
 $D_f = \{x \mid x \leq -4 \text{ atau } x \geq 5, x \in \mathbb{R}\}$

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2x - 8}$

Syarat terdefinisi:

$$x^2 + 2x - 8 \neq 0$$

$$(x + 4)(x - 2) \neq 0$$

$$x \neq -4 \text{ dan } x \neq 2$$

- Domain $y = f(x)$ adalah

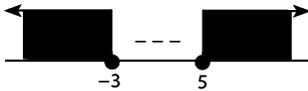
$$D_f = \{x \mid x \neq -4 \text{ dan } x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$$

(c) $f(x) = {}^2\log(x^2 - 2x - 15)$

Syarat terdefinisi:

$$x^2 + 2x - 15 > 0$$

$$(x - 5)(x + 3) > 0$$



⇔ Nilai x yang memenuhi adalah
 $x < -3$ atau $x > 5$

⇔ Domain $y = f(x)$ adalah
 $D_f = \{x \mid x < -3 \text{ atau } x > 5, x \in \mathbb{R}\}$

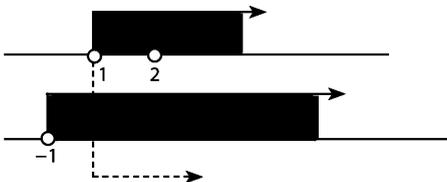
(d) $f(x) = {}^{(x-1)}\log(x+1)$

Syarat terdefinisi:

- $(x - 1) > 0 \rightarrow x > 1$ (1)

- $(x - 1) \neq 1 \rightarrow x \neq 2$ (2)

- $(x + 1) > 0 \rightarrow x > -1$ (3)



⇔ Irisan (1), (2), dan (3): $x > 1$ dan $x \neq 2$

⇔ Domain $y = f(x)$ adalah

$$D_f = \{x \mid x > 1 \text{ dan } x \neq 2, x \in \mathbb{R}\}$$

5. Agar $y = \sqrt{\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2}}$ bernilai riil, syaratnya adalah

A. $1 < x \leq 3$

D. $1 < x < 2$

B. $1 < x < 3$

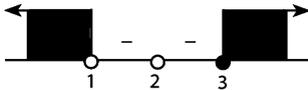
E. $x < 1$ atau $2 < x \leq 3$

C. $x < 1$ atau $x \geq 3$

Jawaban: C

⇔ Syarat bernilai riil adalah:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 3x + 2} \geq 0 \rightarrow \frac{(x-3)(x-2)}{(x-1)(x-2)} \geq 0$$



⇔ Nilai x yang memenuhi adalah:

$$x < 1 \text{ atau } x \geq 3$$

6. Diberikan fungsi f memenuhi persamaan $3f(-x) + f(x - 3) = x + 3$ untuk setiap bilangan riil x . Nilai $8f(-3)$ adalah

A. 24

D. 16

B. 21

E. 15

C. 20

Jawaban: E

⇔ $3f(-x) + f(x - 3) = x + 3$

untuk $x = 3 \rightarrow 3f(-3) + f(0) = 6$

$$9f(-3) + 3f(0) = 18 \quad \dots(1)$$

untuk $x = 0 \rightarrow 3f(0) + f(-3) = 3 \quad \dots(2)$

⇔ Jika persamaan (1) – (2), maka diperoleh:

$$8f(-3) = 15$$

7. Tentukan range (daerah hasil) fungsi kuadrat $y = f(x) = x^2 - 2x - 8$ dengan domain sebagai berikut.

(a) $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

(b) $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$

(c) $D_f = \{x \mid 2 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}$

Pembahasan:

(a) Untuk $D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\}$

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$y_e = -\left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = -\left(\frac{4 + 32}{4}\right) = 9$$

• $R_f = \{y \mid y \geq 9, y \in \mathbb{R}\}$

(b) Untuk $D_f = \{x \mid 0 \leq x \leq 4, x \in \mathbb{R}\}$

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 8$$

→ x_e **di dalam interval domain**

$$x_e = -\frac{b}{2a} = -\left(\frac{-2}{2}\right) = 1$$

$$f(1) = (1)^2 - 2(1) - 8 = -9 \rightarrow f_{\min}$$

$$f(0) = (0)^2 - 2(0) - 8 = -8$$

$$f(4) = (4)^2 - 2(4) - 8 = 0 \rightarrow f_{\max}$$

• $R_f = \{y \mid -9 \leq y \leq 0, y \in \mathbb{R}\}$

(c) $D_f = \{x \mid 2 \leq x \leq 6, x \in \mathbb{R}\}$

$$y = f(x) = x^2 - 2x - 8$$

→ x_e **di dalam interval domain**

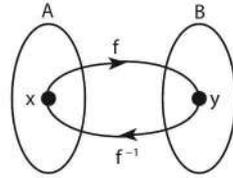
$$f(2) = (2)^2 - 2(2) - 8 = -8 \rightarrow f_{\min}$$

$$f(6) = (6)^2 - 2(6) - 8 = 16 \rightarrow f_{\max}$$

• $R_f = \{y \mid -8 \leq y \leq 16, y \in \mathbb{R}\}$

B. FUNGSI INVERS

Suatu fungsi $f: A \rightarrow B$ mempunyai fungsi invers $f^{-1}: B \rightarrow A$, jika semua elemen himpunan A dan elemen himpunan B berkorespondensi satu-satu.



- Notasi fungsi invers adalah $f^{-1}(y) = x$ atau $y^{-1} = f^{-1}(x)$
- Langkah menentukan Fungsi Invers $y = f(x)$
 - mengubah fungsi $y = f(x)$ dalam bentuk $x = g(y)$, sehingga $f^{-1}(y) = g(y)$
 - mengganti y dengan x , sehingga $f^{-1}(x) = g(x)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

8. Invers dari fungsi $f(x) = \frac{3x-2}{5x+8}$, $x \neq -\frac{8}{5}$ adalah $f^{-1}(x) = \dots$

A. $\frac{-8x+2}{5x-3}$

D. $\frac{8x+2}{3-5x}$

B. $\frac{8x-2}{5x+3}$

E. $\frac{-8x+2}{3-5x}$

C. $\frac{8x-2}{3+5x}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow f(x) = y = \frac{3x-2}{5x+8} \rightarrow \text{buat pers } x \text{ dalam } y$$

$$5xy + 8y = 3x - 2$$

$$5xy - 3x = -8y - 2$$

$$x(5y - 3) = -(8y + 2)$$

$$x = \frac{-(8y + 2)}{(5y - 3)}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{8y + 2}{3 - 5y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{8x + 2}{3 - 5x}$$

SOLUSI SMART!

$$\bullet f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-dx+b}{cx-a}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{3x-2}{5x+8} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{-8x-2}{5x-3}$$
$$= \frac{8x+2}{3-5x}$$

9. Diketahui $f(x) = \frac{9x+4}{6x-5}$, $x \neq \frac{5}{6}$ dan fungsi invers dari $f(x)$ adalah $f^{-1}(x)$.

Nilai $f^{-1}(-2) = \dots$

A. $\frac{14}{3}$

D. $-\frac{17}{14}$

B. $\frac{17}{14}$

E. $-\frac{14}{3}$

C. $\frac{6}{21}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{9x+4}{6x-5}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+4}{6x-9}$$

$$f^{-1}(-2) = \frac{5(-2)+4}{6(-2)-9} = \frac{6}{21}$$

10. Jika $f(x) = 3^{x-1}$, maka $f^{-1}(81) = \dots$

A. 1

D. 4

B. 2

E. 5

C. 3

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow y &= f(x) = 3^{x-1} \\ (x-1) &= {}^3\log y \\ x &= {}^3\log y + 1 \\ \Leftrightarrow f^{-1}(x) &= {}^3\log x + 1 \\ f^{-1}(81) &= {}^3\log 81 + 1 = 4 + 1 = 5\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

- $f(x) = y \rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f(x) &= 3^{x-1} \rightarrow f^{-1}(81) = \dots \\ &\rightarrow \text{cari } x \text{ ketika } y = 81 \\ 3^{x-1} &= 81 = (3)^4 \\ x-1 &= 4 \rightarrow x = 5\end{aligned}$$

11. Jika $f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$, maka nilai $f^{-1}(-1)$ adalah

- A. 3
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. -1
- E. -2

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

- $f(x) = y \rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{1+x}\right) &= \frac{2x-1}{x+1} \rightarrow f^{-1}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) = \frac{1}{1+x} \\ &f^{-1}(-1) = \dots \\ \bullet \frac{2x-1}{1+x} &= -1 \rightarrow 2x-1 = -1-x \\ &3x = 0 \rightarrow x = 0\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(-1) = \frac{1}{1+0} = 1$$

12. Diketahui $f(x) = 2^{3x-1}$, maka invers dari $f(x)$ adalah

- A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot ({}^2\log x + 1)$ D. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot ({}^2\log 3x - 1)$
 B. $f^{-1}(x) = \frac{1}{3} \cdot ({}^2\log x - 1)$ E. $f^{-1}(x) = {}^2\log 3x + 1$
 C. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \cdot ({}^2\log 3x - 1)$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x) = y &= 2^{3x-1} \\ (3x-1) &= {}^2\log y \\ 3x &= {}^2\log y + 1 \\ x &= \frac{1}{3} \cdot ({}^2\log y + 1) \\ \Leftrightarrow f^{-1}(x) &= \frac{1}{3} \cdot ({}^2\log x + 1) \end{aligned}$$

13. Jika $f(x) = {}^5\log(x+1) + {}^5\log\left(\frac{1}{x-2}\right)$ maka $f^{-1}({}^5\log 2) = \dots$

- A. 3 D. 6
 E. 4 E. 7
 C. 5

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow f(x) &= {}^5\log(x+1) + {}^5\log\left(\frac{1}{x-2}\right) \\ f(x) &= {}^5\log\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = y \\ \left(\frac{x+1}{x-2}\right) &= 5^y \\ x+1 &= x \cdot 5^y - 2 \cdot 5^y \\ 2 \cdot 5^y + 1 &= x \cdot 5^y - x \\ 2 \cdot 5^y + 1 &= x(5^y - 1) \\ x &= \frac{2 \cdot 5^y + 1}{5^y - 1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f^{-1}(x) = \frac{2 \cdot 5^x + 1}{5^x - 1}$$

$$f^{-1}({}^5\log 2) = \frac{2 \cdot 5^{{}^5\log 2} + 1}{5^{{}^5\log 2} - 1} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2 - 1} = 5$$

SOLUSI SMART!

- $f(x) = y \rightarrow f^{-1}(y) = x$

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{{}^5\log\left(\frac{x+1}{x-2}\right)}_y \rightarrow f^{-1}(\underbrace{{}^5\log 2}_y) = x$$

→ cari x ketika $y = {}^5\log 2$

$$\Leftrightarrow \cancel{{}^5\log}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) = \cancel{{}^5\log} 2$$

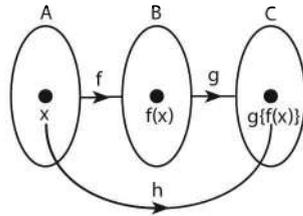
$$(x + 1) = 2(x - 2)$$

$$x = 5$$

C. KOMPOSISI FUNGSI

- Jika fungsi $f: A \rightarrow B$ dan fungsi $g: B \rightarrow C$, maka fungsi $h: A \rightarrow C$ disebut fungsi komposisi yang ditulis dalam rumus:

$$h = g \circ f = g \circ f(x) = g \circ \{f(x)\} = (g \circ f)(x)$$



- **Sifat-sifat fungsi komposisi:**
 1. tidak komutatif $f \circ g \neq g \circ f$.
 2. $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

14. Diketahui $g(x) = x + 1$ fungsi dan $f(x) = x^2 + x - 1$. Komposisi fungsi

$$(f \circ g)(x) = \dots$$

A. $x^2 + 3x + 3$

D. $x^2 + 3x - 1$

B. $x^2 + 3x + 2$

E. $x^2 + 3x + 1$

C. $x^2 - 3x + 1$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = f(x+1)$$

$$= (x+1)^2 + (x+1) - 1$$

$$= x^2 + 3x + 1$$

15. Dari fungsi f dan g diketahui $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$ dan $g(x) = 3x - 2$.

Agar $(g \circ f)(a) = -11$, nilai a yang positif adalah

A. $2\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

B. $1\frac{1}{6}$

E. $\frac{1}{6}$

C. 1

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow (g \circ f)(a) = -11$$

$$g(2a^2 + 3a - 5) = -11$$

$$3(2a^2 + 3a - 5) - 2 = -11$$

$$6a^2 + 9a - 6 = 0 \rightarrow \text{dibagi 3}$$

$$2a^2 + 3a - 2 = 0$$

$$(2a-1)(a+2) = 0$$

$$a = \frac{1}{2} \text{ dan } a = -2$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } a \text{ positif yang memenuhi adalah } a = \frac{1}{2}$$

16. Ditentukan $g(f(x)) = f(g(x))$. Jika $f(x) = 2x + p$ dan $g(x) = 3x + 120$, maka nilai $p = \dots$

- A. 30
- B. 60
- C. 90
- D. 120
- E. 150

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g(f(x)) &= f(g(x)) \\ g(2x+p) &= f(3x+120) \\ 3(2x+p)+120 &= 2(3x+120)+p \\ 6x+3p+120 &= 6x+240+p \\ 2p &= 120 \\ p &= 60 \end{aligned}$$

17. Jika $f(x) = \frac{1}{x}$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$, maka daerah asal fungsi komposisi $g \circ f$ adalah

- A. $x \leq 1$
- B. $x > 1$
- C. $0 < x \leq 1$
- D. $0 < x < 1$
- E. $x > 0$

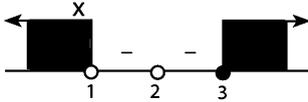
Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow g \circ f(x) &= g\left(\frac{1}{x}\right) \rightarrow x \neq 0 && \dots(1) \\ &= \sqrt{\frac{1}{x}-1} \\ &= \sqrt{\frac{1-x^2}{x}} \\ &= \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{x}} \end{aligned}$$

Syarat akar:

$$\frac{(1-x)(1+x)}{x} \geq 0 \rightarrow \text{dikali } (-1)$$

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \leq 0$$



$$x \leq -1 \text{ atau } 0 < x \leq 1 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah irisan (1) dan (2) $\rightarrow x \leq -1$ atau $0 < x \leq 1$

18. Jika $y = g(x)$ adalah invers dari fungsi $f(x) = x^2 + 2, x \geq 0$, maka daerah nilai fungsi g adalah

- A. $-\infty < y < \infty$
- B. $y \geq 0$
- C. $y \geq 2$
- D. $y \geq \sqrt{2}$
- E. $0 < y < \sqrt{2}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow f(x) = y = x^2 + 2$$

$$x^2 = y - 2$$

$$x = \sqrt{y - 2}$$

$$g(x) = f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$$

\Leftrightarrow Ingat: hasil akar $(\sqrt{\quad}) \geq 0$

\Leftrightarrow Daerah hasil fungsi $g(x) \rightarrow y \geq 0$

19. Diketahui $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 2x + 3$ dan $(f \circ g)(x) = 12x^2 + 32x + 26$. Rumus $f(x) = \dots$

- A. $3x^2 - 2x + 5$
- B. $3x^2 - 2x + 37$
- C. $3x^2 - 2x + 50$
- D. $3x^2 + 2x - 5$
- E. $3x^2 + 2x - 50$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 2x + 50$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 12x^2 + 32x + 26$$

$$f(2x+3) = 3(2x+3)^2 - 2(2x+3) + 5$$

$$\text{misal: } (2x+3) = a$$

$$f(a) = 3a^2 - 2a + 5$$

$$f(x) = 3x^2 - 2x + 5$$

$$\Leftrightarrow g(x) = 2x + 3 \rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x-3}{2}$$

$$\Leftrightarrow (f \circ g)(x) = 12x^2 + 32x + 26$$

$$f(x) = 12(g^{-1}(x))^2 + 32(g^{-1}(x)) + 26$$

$$f(x) = 12\left(\frac{x-3}{2}\right)^2 + 32\left(\frac{x-3}{2}\right) + 26$$

$$= 3x^2 - 2x + 5$$

20. Jika $g(x+1) = 2x - 1$ dan $f(g(x+1)) = 2x + 4$, maka $f(0) = \dots$

A. 6

D. -4

B. 5

E. -6

C. 3

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow g(x+1) = 2x - 1$$

$$\Leftrightarrow f\left\{\underbrace{g(x+1)}_{2x-1}\right\} = 2x + 4$$

$$\bullet (2x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow f(0) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + 4 = 5$$

21. Jika $f(x) = \frac{x+2011}{x-1}$ maka $(f \circ f \circ f \circ f \circ f)(x) = \dots$

A. $\frac{x+2011}{x-1}$

D. $\frac{x-2011}{x-1}$

B. $\frac{x+2011}{x+1}$

E. $\frac{-x+2011}{x-1}$

C. $\frac{x-2011}{x+1}$

Jawaban: A

SOLUSI SMART!

- $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

- $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$
dengan f dan g saling invers

$$\Leftrightarrow f(x) = f^{-1}(x) = \frac{x+2011}{x-1} \rightarrow (f \circ f)(x) = x$$

$$\left(\underbrace{f \circ f \circ f \circ f \circ f}_{\text{ganjil}} \right)(x) = f(x) = \frac{x+2011}{x-1}$$

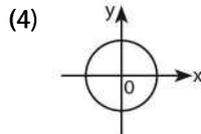
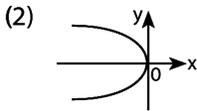
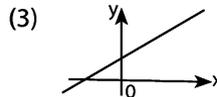
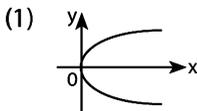
- Jika banyak komposisi fungsinya **ganjil** maka hasilnya adalah fungsi **$f(x)$**
- Jika banyak komposisi fungsinya genap maka hasilnya adalah x

LATIHAN SOAL 11

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Grafik berikut yang merupakan grafik fungsi $x = f(y)$ adalah



Pernyataan yang benar adalah

- A. (1), (2), dan (3)
- B. (1) dan (3)
- C. (2) dan (4)
- D. (4) saja
- E. (1), (2), (3) dan (4)

2. Jika $f(x) = x^2 - 5$, maka $f(x-2) = \dots$

- A. $x^2 - 4x - 9$
- B. $x^2 - 4x - 7$
- C. $x^2 - 4x - 1$
- D. $x^2 - 9$
- E. $x^2 - 1$

3. Misalkan $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{untuk } 0 < x < 1 \\ x^2 + 1, & \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$, maka $f(2) \cdot f(-4) + f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(3) = \dots$
- A. 52
B. 55
C. 85
D. 105
E. 210
4. Diketahui $f(x) = x - 4$. Nilai dari $f(x^2) - \{f(x)\}^2 + 3 \cdot f(x)$ untuk $x = -2$ adalah
- A. -54
B. -36
C. -18
D. 6
E. 18
5. Jika fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 6$, maka nilai p yang memenuhi persamaan $f(2p-1) = (7+p)$ adalah
- A. 2 dan $\frac{1}{4}$
B. -2 dan $\frac{1}{4}$
C. 2 dan $-\frac{1}{4}$
D. 4 dan $\frac{1}{2}$
E. -4 dan $\frac{1}{2}$
6. Jika fungsi $f(x) = ax + 3$ memenuhi $f(f(2)) - 3a = 4$, maka $a = \dots$
- A. $\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{2}{3}$
7. Jika $f(x) = 3^x$, maka untuk setiap x berlaku $f(x+1) - f(x) = \dots$
- A. $f(x)$
B. $2f(x)$
C. $3f(x)$
D. $f(x-1)$
E. $3f(x+1)$

8. Jika $f(n) = 2^{(n+2)} \cdot 6^{(n-4)}$ dan $g(n) = 12^{(n-1)}$, n bilangan asli, maka $\frac{f(n)}{g(n)} = \dots$

A. $\frac{1}{32}$

D. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{27}$

E. $\frac{2}{9}$

C. $\frac{1}{18}$

9. Untuk bilangan asli n didefinisikan fungsi f sebagai berikut

$$f(n) = \begin{cases} n+3, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \\ \frac{n}{2}, & \text{untuk } n \text{ genap} \end{cases}$$

Jika k adalah bilangan ganjil sedemikian hingga $f(f(f(k))) = 27$, maka nilai k adalah

A. 45

D. 45 atau 105

B. 75

E. $\{\emptyset\}$

C. 105

10. Jika fungsi f memenuhi persamaan $f(x) + 2f(8-x) = x$ untuk setiap x bilangan riil, maka nilai $f(7)$ adalah

A. -3

D. $\frac{1}{2}$

B. -2

E. $\frac{1}{4}$

C. $-\frac{5}{3}$

11. Jika $f(1) = 5$ dan $f(x+1) = 2f(x)$, maka $f(7) = \dots$

A. 640

D. 128

B. 160

E. 320

C. 32

12. $f(x)$ adalah fungsi untuk bilangan riil. Jika $f(1-x) + 2f(x) = x$, maka $f(x) = \dots$

A. $x + \frac{1}{3}$

D. $-x - \frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{3} - x$

E. $\frac{1}{3}(1-x)$

C. $x - \frac{1}{3}$

13. Bila $f(x)$ memenuhi $2f(x) + f(1-x)$ untuk semua nilai riil x , maka $f(x)$ sama dengan

A. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

14. Fungsi $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x + 1}{16 - x^2}}$ terdefiniskan untuk x yang memenuhi

A. $-1 < x < 4$

D. $x < -1$ atau $x > 1$

B. $-1 < x < 1$

E. $x < -4$ atau $x > 4$

C. $-4 < x < 4$

15. Daerah asal (domain) fungsi $f(x) = {}^{10}\log\left(\frac{3x^2 + x - 2}{2x^2 - 5x + 2}\right)$ adalah

A. $x < -1$ atau $\frac{1}{2} < x < \frac{2}{3}$ atau $x > 2$

B. $x < -2$ atau $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$ atau $x > 2$

C. $x < -2$ atau $x > \frac{1}{3}$ dan $x \neq 1$

D. $-2 < x < \frac{1}{2}$ atau $\frac{2}{3} < x < 2$

E. $x < -1$ atau $x > 2$

16. Jika $f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & 0 \leq x < 1 \\ x^2, & 1 \leq x < 2 \end{cases}$, maka kisaran (range) dari fungsi di atas adalah
- A. $\{y \mid -1 < y \leq 4\}$ D. $\{y \mid y \leq -1\}$
 B. $\{y \mid -1 \leq y < 4\}$ E. $\{y \mid y < 4\}$
 C. $\{y \mid y \geq -1\}$

SOAL LATIHAN - 1

17. Jika ditentukan $f(x) = \frac{4x+1}{x-4}$ dengan $x \in \mathbb{R}$ dan $x \neq 4$, maka fungsi invers $f^{-1}(x) = \dots$
- A. $\frac{x+4}{4x-1}$ D. $\frac{4x+1}{x-4}$
 B. $\frac{x-4}{4x+1}$ E. $\frac{4x-1}{x-4}$
 C. $\frac{4x-1}{x+4}$
18. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{3x+5}{x-2}$, $x \neq 2$ dan $f^{-1}(x)$, dan adalah invers dari $f(x)$. Nilai $f^{-1}(4) = \dots$
- A. -3 D. $\frac{13}{7}$
 B. $-\frac{3}{7}$ E. 13
 C. $\frac{3}{7}$
19. Jika $f(x) = \sqrt{x} + 3$ maka $f^{-1}(x) = \dots$
- A. $\frac{1}{\sqrt{x}+3}$ D. $(x-3)^{-2}$
 B. $x^{-\frac{1}{2}} + 3$ E. $(x+3)^{-2}$
 C. $(x-3)^2$

20. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{x+1}{x}$, $x \neq 0$ dan f^{-1} adalah invers f . Jika k adalah banyaknya faktor prima dari 210, maka $f^{-1}(k) = \dots$

- A. $\frac{1}{5}$ D. 3
 B. $\frac{1}{4}$ E. 4
 C. $\frac{1}{3}$

21. Fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ditentukan oleh $f(x+2) = \frac{x-2}{x+4}$ dan f^{-1} adalah invers fungsi f , maka $f^{-1}(x) = \dots$

- A. $\frac{2x+4}{1-x}$, $x \neq 1$ D. $\frac{4x+2}{1-x}$, $x \neq 1$
 B. $\frac{2x+4}{x-1}$, $x \neq 1$ E. $\frac{4x+2}{x-1}$, $x \neq 1$
 C. $\frac{2x-4}{x-1}$, $x \neq 1$

22. Jika $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$, $x \neq \pm 2$ maka $f^{-1}(x)$ adalah

- A. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+2}}$ D. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-2}}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$
 B. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \neq \pm 1$ E. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, $x \neq \pm 1$
 C. $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$

23. Jika $f(x) = {}^2 \log(4x-3)$, invers dari f adalah

- A. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(2^x - 3)$ D. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2^x + 4)$
 B. $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}(2^x + 3)$ E. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2^x - 4)$
 C. $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(2^x - 3)$

24. Invers dari $f(x) = x^2 - 6x + 9$, untuk $x \geq 3$, adalah
- A. $f^{-1}(x) = 3 - \sqrt{x}$ D. $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 3}$
 B. $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x}$ E. $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$
 C. $f^{-1}(x) = 3 + \sqrt{x - 3}$
25. Jika $f(x) = {}^2\log(x^2 - 4x - 8)$, untuk $x \leq 2$ nilai $f^{-1}(2) = \dots$
- A. -3 atau 4 D. 4
 B. -2 atau 6 E. 6
 C. -2
26. Jika $f\left(\frac{3}{2x-3}\right) = \frac{2x+3}{x+4}$, maka nilai $f^{-1}(1)$ adalah
- A. -3 D. $\frac{3}{4}$
 B. $-\frac{2}{3}$ E. 3
 C. $-\frac{1}{2}$
27. Jika $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{x-6}{x+3}$, dan $f^{-1}(a) = -k$, maka nilai a adalah
- A. -2 D. -1
 B. $-\frac{3}{2}$ E. $-\frac{1}{2}$
 C. $-\frac{4}{3}$

SOAL LATIHAN - 1

28. Jika $f(x) = 2 - x$, $g(x) = x^2 + 1$ dan $h(x) = 3x$, maka $(h \circ g \circ f)(3) = \dots$
- A. -80 D. 80
 B. -6 E. 81
 C. 6

29. Jika $f(x) = x^2 + 1$ dan $g(x) = 2x - 1$, maka $(f \circ g)(x) = \dots$
- $2x^2 + 1$
 - $2x^2 + 2x + 1$
 - $4x^2 - 4x + 2$
 - $4x^2 + 2x + 2$
 - $4x^2 + 4x - 2$
30. Jika $f(x) = 2x - 3$ dan $(g \circ f)(x) = 2x + 1$, maka $g(x) = \dots$
- $x + 4$
 - $x - 4$
 - $2x + 3$
 - $2x + 4$
 - $2x - 4$
31. Jika $(g \circ f)(x) = 4x^2 + 4x$, $g(x) = x^2 - 1$, maka $f(x - 2)$ adalah
- $2x + 1$
 - $2x - 1$
 - $2x - 3$
 - $2x + 3$
 - $2x - 5$
32. Jika $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x - 2$ dan $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = x^2 - 1$ maka $f \circ g(x + 1) = \dots$
- $2x^2 - 4$
 - $2x^2 - 5$
 - $2x^2 + 4x - 2$
 - $2x^2 - 4x + 1$
 - $2x^2 - 2$
33. Diketahui $(f \circ g)(x) = 4^{2x+1}$. Jika $g(x) = 2x - 1$, maka $f(x) = \dots$
- 4^{x+2}
 - 4^{2x+3}
 - $2^{4x+1} + \frac{1}{2}$
 - $2^{2x+1} + \frac{1}{2}$
 - $2^{2x+1} + 1$
34. Jika $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{x}{3x-2}$, maka $g(x)$ sama dengan
- $2 + \frac{1}{x}$
 - $1 + \frac{2}{x}$
 - $2 - \frac{1}{x}$
 - $1 - \frac{2}{x}$
 - $2 - \frac{1}{2x}$

35. Jika $g(x-2) = 2x-3$ dan $(f \circ g)(x-2) = 4x^2 - 8x + 3$, maka $f(-3) = \dots$
- A. -3
B. 0
C. 3
D. 12
E. 15
36. Jika $(g \circ f)(x) = -9x^2 - 6x$ dan $g(x) = -x^2 + 1$, maka $f(2x+3) = \dots$
- A. $6x+4$
B. $6x+10$
C. $2x+4$
D. $2x+1$
E. $3x+1$
37. Jika $f(x-2) = 3-2x$ dan $(g \circ f)(x+2) = 5-4x$, maka nilai $g(-1)$ adalah
- A. 17
B. 13
C. 5
D. -5
E. -13
38. Jika $f(x+1) = x-3$ dan $g(x) = x^2 - 2x$, maka nilai $(f^{-1} \circ g)(3)$ adalah
- A. -3
B. -1
C. 1
D. 3
E. 7
39. Jika $f(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = 2x+1$, dan $(f \circ g \circ h)(x) = \sqrt{4x^2 + 8x + 3}$, maka $g(-1) = \dots$
- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3
40. Diketahui $f(x) = 2x-1$ dan $g(x) = \frac{5x}{x+1}$. Jika h adalah fungsi sehingga $(g \circ h)(x) = x-2$ maka $(h \circ f)(x) = \dots$
- A. $\frac{2x-3}{2x+8}$
B. $\frac{2x-3}{-2x+6}$
C. $\frac{2x-3}{2x-8}$
D. $\frac{2x-3}{-2x+8}$
E. $\frac{2x-3}{-2x-8}$

41. Jika $f(x+1) = \frac{2x-7}{3x+7}$, maka nilai x yang memenuhi $(f \circ f)^{-1}(3x+4) = 1$

adalah

- A. -8
B. -7
C. -6
D. -5
E. -4

42. Jika diketahui $f \circ g \circ h(x) = \frac{(x+1)^{10}}{(x+1)^{10}+1}$, $f(x) = \frac{x}{x+1}$, dan $h(x) = x+3$,

maka $g(x+5)$ adalah

- A. $(x-2)^{10}$
B. $(x+3)^{10}$
C. $(x+5)$
D. $(x-2)^8$
E. $(x-3)^{10}$

43. Jika $(f \circ g)(x) = 4x^2 + 8x - 3$ dan $g(x) = 2x + 4$, maka $f^{-1}(x) = \dots$

- A. $x+9$
B. $2 + \sqrt{x}$
C. $x^2 - 4x - 3$
D. $2 + \sqrt{x+1}$
E. $2 + \sqrt{x+7}$

44. Jika $f(x) = \frac{1}{x+1}$ dan $g(x) = \frac{2}{3-x}$, maka $(f \circ g)^{-1}(x) = \dots$

- A. $\frac{x-1}{5x-3}$
B. $\frac{5x-3}{x-1}$
C. $\frac{3-x}{5-x}$
D. $\frac{5-x}{3-x}$
E. $\frac{2x-1}{3x-2}$

45. Jika $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{1}{x-2} \sqrt{x^2 - 4x + 5}$, maka $g(x-3) = \dots$

A. $\frac{1}{x-5}$

D. $\frac{1}{x-3}$

B. $\frac{1}{x+1}$

E. $\frac{1}{x+3}$

C. $\frac{1}{x-1}$

46. Jika $f(x+1) = 2x$ dan $(f \circ g)(x+1) = 2x^2 + 4x - 2$, maka $g(x) = \dots$

A. $x^2 - 1$

D. $x^2 + 2x - 1$

B. $x^2 - 2$

E. $x^2 + 2x - 2$

C. $x^2 + 2x$

47. Jika $f(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ dan $g(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$ maka $(g \circ f)^{-1}(2) = \dots$

A. $\frac{1}{4}$

D. 2

B. $\frac{1}{2}$

E. 4

C. 1

48. Diketahui fungsi f dan g dinyatakan $f(x) = 2x + 4$, $g(x) = \frac{2x+5}{x-4}$ dan $h(x) = (g \circ f^{-1}(x))$ untuk f^{-1} adalah invers fungsi f dan h^{-1} adalah invers fungsi h . Maka rumus fungsi $h^{-1}(x) = \dots$

A. $\frac{12x-2}{x-2}$

D. $\frac{12x+2}{x+2}$

B. $\frac{6x+2}{x-2}$

E. $\frac{6x+2}{x+2}$

C. $\frac{12x+2}{x-2}$

49. Jika $f(x) = x^2 + 2$ dan $g(x) = \sqrt{x-1}$, maka daerah asal fungsi $f \circ g$ adalah

A. $-\infty < x < \infty$

D. $x \geq 1$

B. $1 \leq x \leq 2$

E. $x \geq 2$

C. $x \geq 0$

50. Jika $h(x) = 1 - x^2$, $-\infty < x < \infty$, $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x \leq 1$, maka daerah asal $f \circ h(x)$ adalah

A. $-\infty < x < \infty$

D. $x \leq 0$

B. $x \geq 0$

E. $x \leq -1$

C. $x \leq 1$



PROGRAM LINEAR

12

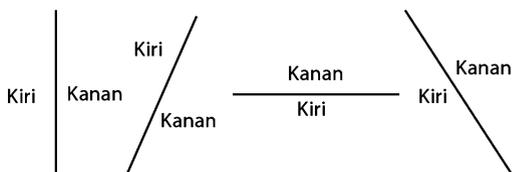
A. PENGERTIAN & DAERAH PENYELESAIAN

Program linear adalah salah satu bagian matematika terapan yang dapat menyelesaikan berbagai masalah kehidupan sehari-hari, dimana model matematika yang terdiri dari pertidaksamaan-pertidaksamaan linear mempunyai banyak penyelesaian, satu atau lebih dan memberikan hasil yang paling baik (maksimum/minimum).

Langkah menentukan daerah penyelesaian, sebagai berikut.

a. Dari Pertidaksamaan $Ax + Dy \geq C$ atau $Ax + Dy \leq C$ ke Daerah Penyelesaian

- Gambar garis $Ax + By = C$
- Jadikan A (koefisien x) positif $\rightarrow A > 0$
 - Jika tandanya \geq , maka daerah penyelesaiannya **sebelah kanan garis $Ax + By = C$.**
 - Jika tandanya \leq , maka daerah penyelesaiannya **sebelah kiri garis $Ax + By = C$.**

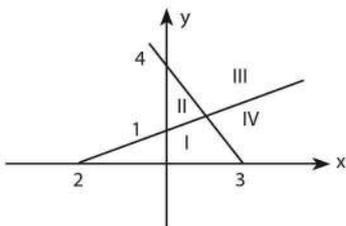


h. Dari Daerah Penyelesaian ke Pertidaksamaan $Ax + Dy \geq C$ atau $Ax + Dy \leq C$

- Menentukan persamaan garis $Ax + By = C$
- Jadikan A (koefisien x) positif $\rightarrow A > 0$
 - Jika daerah penyelesaiannya **sebelah kanan garis $Ax + By = C$** , maka tandanya \geq .
 - Jika daerah penyelesaiannya **sebelah kiri garis $Ax + By = C$** , maka tandanya \leq .

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1.



Himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan gambar di atas terletak di daerah

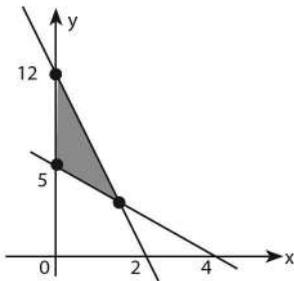
$$\begin{cases} 2y - x \leq 2 \\ 4x + 3y \leq 12 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \text{ pada}$$

- A. I
B. II
C. III
D. I dan IV
E. II dan III

Jawaban: A

- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah arsiran di **sebelah kanan** garis yang melalui titik $(-2,0)$ dan $(0,1) \rightarrow x - 2y \geq 2$
- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah arsiran di **sebelah kiri** garis yang melalui titik $(3,0)$ dan $(0,4) \rightarrow 4x + 3 \leq 12$
- ⇔ $x \geq 0 \rightarrow$ daerah penyelesaian di **sebelah kanan** garis $x = 0$ (sumbu y)
 $y \geq 0 \rightarrow$ daerah penyelesaian di **sebelah kanan** (atas) garis $y = 0$ (sumbu x)
- ⇔ Daerah arsiran yang memenuhi pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut adalah **daerah I**

2.



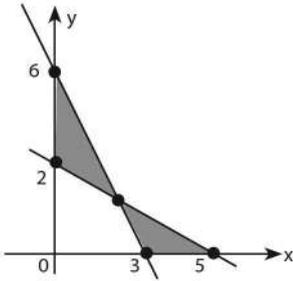
Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan

- A. $x \geq 0, 6x + y \leq 12, 5x + 4y \geq 20$
- B. $x \geq 0, 6x + y \geq 12, 5x + 4y \leq 20$
- C. $x \geq 0, 6x + y \leq 12, 4x + 5y \geq 20$
- D. $x \geq 0, x + 6y \leq 12, 4x + 5y \geq 20$
- E. $x \geq 0, x + 6y \leq 12, 5x + 4y \geq 20$

Jawaban: A

- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah arsiran di **sebelah kanan** garis yang melalui $(4, 0)$ & $(0, 5) \rightarrow 5x + 4y \geq 20$
- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah arsiran di **sebelah kiri** garis yang melalui $(2, 0)$ & $(0, 12) \rightarrow 6x + y \leq 12$
- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi **sebelah kanan** sumbu $y \rightarrow x \geq 0$
- ⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah arsiran adalah A.

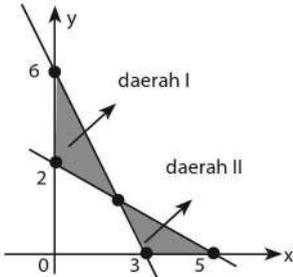
3.



Sistem pertidaksamaan yang himpunan penyelesaiannya merupakan daerah yang diarsir pada gambar di atas adalah

- A. $2x + y - 6 \leq 0, 2x + 5y - 10 \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$
- B. $2x + y - 6 \geq 0, 2x + 5y - 10 \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$
- C. $(2x + y - 6)(2x + 5y - 10) \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$
- D. $(2x + y + 6)(2x + 5y + 10) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$
- E. $(2x + y - 6)(2x + 5y - 10) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$

Jawaban: E



$$\Leftrightarrow \text{Garis yang melalui titik } \left. \begin{matrix} (3,0) \\ (0,6) \end{matrix} \right\} \rightarrow 2x + y - 6 = 0$$

$$\text{Garis yang melalui titik } \left. \begin{matrix} (5,0) \\ (0,2) \end{matrix} \right\} \rightarrow 5x + 2y - 10 = 0$$

\Leftrightarrow Daerah I dipenuhi oleh:

$$2x + y - 6 \leq 0, 5x + 2y - 10 \geq 0, x \geq 0$$

Daerah II dipenuhi oleh:

$$2x + y - 6 \geq 0, 5x + 2y - 10 \leq 0, y \geq 0$$

⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi daerah I dan II adalah:

$$(2x + y - 6)(2x + 5y - 10) \leq 0, x \geq 0, y \geq 0$$

B. NILAI OPTIMUM FUNGSI OBYEKTIF

a. Cara Uji Titik Penyelesaian

- Gambar **daerah penyelesaian** pertidaksamaan soal.
- Tentukan **titik-titik penyelesaian** (titik-titik pojok daerah penyelesaian).
- Substitusikan **titik-titik penyelesaian** ke fungsi obyektif/fungsi sasaran/fungsi tujuan sampai mendapatkan **nilai optimum** (nilai maksimum atau minimum fungsi obyektif).

h. Cara Garis Selidik

- Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan soal.
- Tentukan titik-titik penyelesaian (titik-titik pojok) pada daerah yang diarsir.
- Tentukan gradien garis selidik fungsi obyektif.
 $f(x,y) = ax + by + c \rightarrow \text{gradiennya} = m = -\frac{a}{b}$
- Buat garis selidik sesuai dengan gradiennya, kemudian geser garis tersebut sehingga melalui titik-titik penyelesaian.
 - untuk $a > 0 \rightarrow$ nilai maksimum fungsi obyektif terletak pada titik yang dilalui paling kanan dan nilai minimum fungsi obyektif terletak pada titik yang dilalui paling kiri.
 - untuk $a < 0 \rightarrow$ nilai maksimum fungsi obyektif terletak pada titik yang dilalui paling kiri dan nilai minimum fungsi obyektif terletak pada titik yang dilalui paling kanan.

Catatan:

Jika gradien dari model matematika pembatas masalah ada yang sama dengan gradien model matematika fungsi obyektif, maka nilai optimum fungsi obyektif ada pada semua titik pada ruas garis.

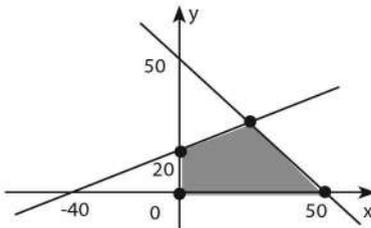
CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

4. Dari sistem pertidaksamaan linear, $x + y \leq 50$, $2y \leq x + 40$, $x \geq 0$ dan $y \geq 0$, maka nilai maksimum dari $3x + 5y$ adalah

- A. 100
- B. 150
- C. 190
- D. 210
- E. 250

Jawaban: D

- ⇔ • $x \geq 0$ dan $y \geq 0 \rightarrow$ daerah penyelesaian di kuadran I
- $x + y \leq 50$ daerah penyelesaian di sebelah kiri garis yang melalui titik $(0, 50)$ dan $(50, 0)$
- $x + 40 \geq 2y$ daerah penyelesaian di sebelah kanan garis yang melalui titik $(-40, 0)$ dan $(0, 20)$

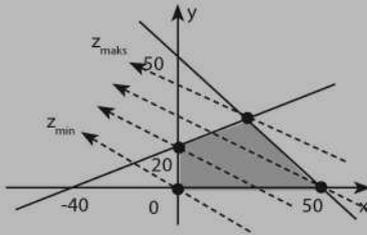


⇔ Titik-titik penyelesaiannya adalah titik $(0, 0)$, $(50, 0)$, $(0, 20)$ dan $(20, 30)$.

- ⇔ $f(x, y) = 3x + 5y$
 - $(0, 0) \rightarrow f = 3(0) + 5(0) = 0$ (min)
 - $(50, 0) \rightarrow f = 3(50) + 5(0) = 150$
 - $(0, 20) \rightarrow f = 3(0) + 5(20) = 100$
 - $(20, 30) \rightarrow f = 3(20) + 5(30) = 210$ (maks)

SOLUSI SMART!

- ⇒ Gradien fungsi $z = 3x + 5y \rightarrow m = -\frac{3}{5}$
- ⇒ Koefisien x positif \rightarrow nilai maksimum di titik A (titik yang dilalui paling kanan oleh garis selidik)

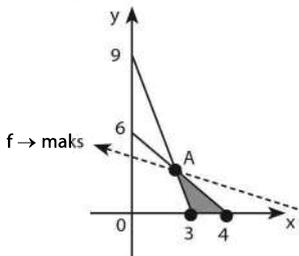


- ⇒ Perpotongan garis $\left. \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x - 2y = -40 \end{array} \right\} \rightarrow \text{ditik } (20, 30)$
- ⇒ Nilai maksimum $z = 3x + 5y$ di titik $(20, 30)$
 - $z(20, 30) = 3(20) + 5(30) = 210$

5. Nilai maksimum dari $F = 2x + 3y$ pada daerah $3x + y \geq 9$, $3x + 2y \leq 12$, $x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah
- A. 6
 - B. 12
 - C. 13
 - D. 18
 - E. 27

Jawaban: C

- ⇒ Gradien $F(x, y) = 2x + 3y \rightarrow m = -\frac{2}{3}$
- ⇒ Daerah penyelesaian yang memenuhi pertidaksamaan soal adalah:



⇔ Perpotongan garis $\left. \begin{array}{l} 3x + y = 9 \\ 3x + 2y = 12 \end{array} \right\} \rightarrow \text{di } A(2,3)$

⇔ Nilai maksimum fungsi $F(x, y)$ terjadi di titik $A(2, 3)$ yaitu titik yang dilalui garis selidik paling kanan.

• $F(2, 3) = 2(2) + 3(3) = 13$

6. Untuk (x, y) yang memenuhi pertidaksamaan $x \geq 0, y \geq 0, 2x + 5y \leq 10$ dan $4x + 3y \leq 12$, maka nilai $z = y - 2x + 2$ terletak dalam selang

A. $\{z \mid 0 \leq z \leq 2\}$

D. $\{z \mid 2 \leq z \leq 11\}$

B. $\{z \mid -2 \leq z \leq 0\}$

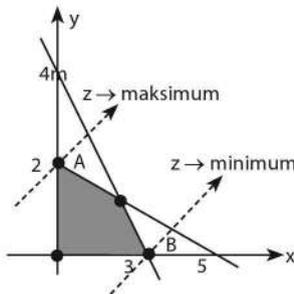
E. $\{z \mid 4 \leq z \leq 13\}$

C. $\{z \mid -4 \leq z \leq 4\}$

Jawaban: C

⇔ Gradien fungsi sasaran

$z = y - 2x + 2 \rightarrow m_z = 2$



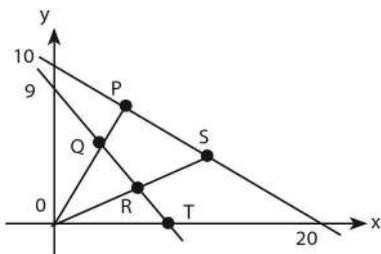
⇔ Karena koefisien x negatif, maka:

• Nilai z maks di titik A (dilalui garis selidik paling kiri) $= 2 - 2(0) + 2 = 4$

• Nilai z min di titik B (dilalui garis selidik paling kanan) $= (0) - 2(3) + 2 = -4$

⇔ Interval fungsi z adalah $-4 \leq z \leq 4$

7.



Dalam sistem pertidaksamaan $2y \geq x$, $y \leq 2x$, $2y + x \leq 20$, $y + x \geq 9$, nilai minimum dari $-3y - x$ dicapai pada titik

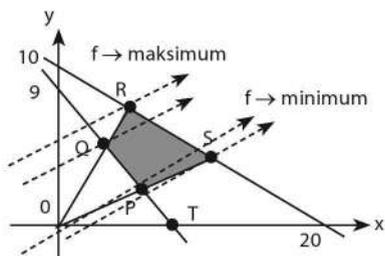
- | | |
|------|------|
| A. O | D. R |
| B. P | E. S |
| C. Q | |

Jawaban: E

⇔ Gradien garis $f(x,y) = 3y - x \rightarrow m = \frac{1}{3}$

Geser garis selidik: $3y - x = k$ ke titik

⇔ Daerah penyelesaian yang memenuhi adalah PQRS dan titik P, Q, R, dan S sebagai titik-titik penyelesaian.

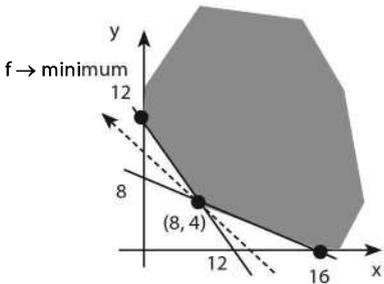


⇔ Karena koefisien x negatif maka fungsi f minimum di titik S (titik yang dilalui garis selidik paling kanan)

8. Agar fungsi $f(x, y) = ax + 4y$ dengan kendala $x + y \geq 12, x + 2y \geq 16, x \geq 0, y \geq 0$ mencapai minimum hanya di titik $(8, 4)$, maka nilai konstanta a yang memenuhi adalah
- A. $2 < a < 4$
 - B. $4 < a < 6$
 - C. $4 < a < 8$
 - D. $-4 < a < -2$
 - E. $-8 < a < -4$

Jawaban: A

- \Leftrightarrow Gradien $f(x, y) = ax + 4y \rightarrow m = -\frac{a}{4}$
- \Leftrightarrow Daerah penyelesaiannya adalah daerah terbuka yang diarsir pada gambar di atas.



- \Leftrightarrow Terlihat pada gambar supaya fungsi f minimum di titik $(8, 4)$, maka gradien fungsi harus berada pada interval:

$$-1 < m < -\frac{1}{2}$$

$$-1 < -\frac{a}{4} < -\frac{1}{2} \rightarrow \text{dikali } (-4)$$

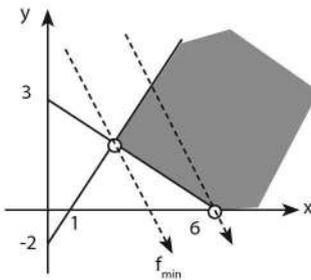
$$2 < a < 4$$

9. Jika fungsi $f(x, y) = 500 + x + y$, dengan syarat $x \geq 0, y \geq 0, 2x - y - 2 \geq 0$, dan $x + 2y - 6 \geq 0$, maka
- A. fungsi f mempunyai nilai maksimum dan tidak mempunyai nilai minimum
 - B. nilai maksimum atau nilai minimum fungsi f tidak dapat ditentukan

- C. fungsi f mempunyai nilai minimum dan tidak mempunyai nilai maksimum
- D. fungsi f tidak mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum
- E. fungsi f mempunyai nilai maksimum dan nilai minimum

Jawaban: C

- ⇔ Gradien $f(x, y) = 500 + x + y \rightarrow m_f = -1$
- ⇔ Daerah penyelesaian (arsiran) yang memenuhi pertidaksamaan soal adalah:



- ⇔ Karena daerah penyelesaiannya terbuka dan koefisien x positif, maka fungsi f hanya memiliki nilai minimum (titik yang dilalui garis selidik paling kiri)

C. PROGRAM LINEAR

Langkah-langkah Penyelesaian Program Linear sebagai berikut.

- Menetapkan apa yang dianggap sebagai variabel x dan y .
- Membuat model matematika pembatasan masalah.
- Menggambar daerah himpunan penyelesaian.
- Membuat model matematika fungsi sasaran.
- Menentukan hasil optimum (**maksimum atau minimum**).

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

10. Untuk membuat barang A diperlukan 6 jam kerja mesin I dan 4 jam kerja mesin II, sedangkan untuk barang B diperlukan 4 jam kerja mesin I dan 8 jam kerja mesin II. Setiap hari kedua mesin tersebut bekerja tidak lebih dari 18 jam. Jika setiap hari dapat dihasilkan x barang A dan y barang B, maka model matematikanya adalah sistem pertaksamaan

- A. $6x + 4y \leq 18, 2x + 8y \leq 18, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$
 B. $3x + 2y \leq 9, 2x + 4y \leq 9, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$
 C. $2x + 3y \leq 9, 4x + 2y \leq 9, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$
 D. $3x + 4y \leq 9, 2x + 2y \leq 9, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$
 E. $2x + 3y \leq 9, 2x + 4y \leq 9, x \geq 0, \text{ dan } y \geq 0$

Jawaban: B

$\Leftrightarrow x = \text{barang A}$
 $y = \text{barang B}$

	Mesin I (jam)	mesinII (jam)
Barang A (x)	6	4
Barang B (y)	4	8
	18	18

\Leftrightarrow Pertidaksamaan yang memenuhi adalah:

$$6x + 4y \leq 18 \rightarrow 3x + 2y \leq 9$$

$$4x + 8y \leq 18 \rightarrow 2x + 4y \leq 9$$

$$x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0$$

11. Seorang peternak memiliki 10 kandang ternak untuk memelihara ayam dan itik. Setiap kandang dapat menampung ayam sebanyak 36 ekor, atau menampung itik sebanyak 24 ekor. Dia menaksir keuntungan per bulan untuk seekor ayam Rp200,00 dan seekor itik Rp250,00, sedangkan jumlah ternak yang direncanakannya tidak lebih dari 300 ekor. Jika banyaknya kandang berisi ayam disebut x , dan banyaknya kandang yang diisi itik disebut y , maka model matematika untuk kegiatan peternak tersebut dinyatakan sebagai berikut

- A. $x \geq 0, y \geq 0, 36x + 24y \leq 300, x + y \leq 10$
- B. $x \geq 0, y \geq 0, 200x + 24y \leq 300, x + y \leq 10$
- C. $x \geq 0, y \geq 0, 36x + 240y \leq 300, x + y \leq 10$
- D. $x \geq 0, y \geq 0, 200x + 250y \leq 300, x + y \leq 10$
- E. $x \geq 0, y \geq 0, 36x + 24y \leq 300, x + y \leq 10$

Jawaban: E

⇨ Tabel untuk membuat model matematika:

	Kandang	Keuntungan
Ayam (x)	36	200
Itik (y)	24	250
10	300	

⇨ Pertidaksamaan yang memenuhi adalah:

- $x + y \leq 10$... (1)
- $36x + 24y \leq 300$... (2)
- $x \geq 0$ dan $y \geq 0$... (3)

12. Luas daerah parkir 1.760 m². Luas rata-rata untuk mobil kecil 4 m² dan mobil besar 20 m². Daya tampung maksimum hanya 200 kendaraan, biaya parkir mobil kecil Rp1.000,00/jam dan mobil besar Rp2.000,00/jam. Jika dalam satu jam terisi penuh dan tidak ada kendaraan yang pergi dan datang, maka hasil maksimum tempat parkir itu adalah

- A. Rp176.000,00
- B. Rp200.000,00
- C. Rp260.000,00
- D. Rp300.000,00
- E. Rp340.000,00

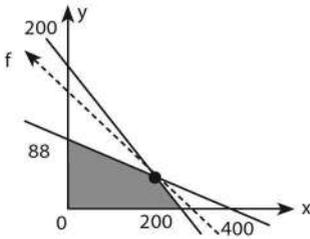
Jawaban: C

	Tempat (m ²)	Biaya (Rp)
M kecil (x)	4	1000
M besar (y)	20	2000
200	1.760	

- ⇨ $x + y \leq 200$... (1)
- $4x + 20y \leq 1.760 \rightarrow x + 5y \leq 440$... (2)
- $x \geq 0$ dan $y \geq 0$... (3)

⇨ Gradien fungsi sasaran

$$f(x,y) = 1.000x + 2.000y \rightarrow mf = -\frac{1}{2}$$



⇔ Perpotongan garis $\left. \begin{array}{l} x + y = 200 \\ x + 5y = 440 \end{array} \right\} \rightarrow \text{di titik } (140, 60)$

⇔ Biaya parkir maksimum di titik (140, 60) (titik yang dilalui paling kanan)

- $f(140, 60) = 1.000(140) + 2.000(60)$
 $= 140.000 + 120.000$
 $= 260.000$

13. Untuk menambah penghasilan seorang ibu setiap harinya memproduksi dua jenis kue untuk dijual. Setiap kue I modalnya Rp200,00 dengan keuntungan 40%, sedangkan setiap kue jenis II modalnya Rp300,00 dengan keuntungan 30%. Jika modal yang tersedia setiap harinya adalah Rp100.000,00 dan paling banyak hanya dapat memproduksi 400 kue, maka keuntungan terbesar yang dapat dicapai ibu tersebut dari modalnya adalah

- A. 30%
- B. 32%
- C. 34%
- D. 36%
- E. 40%

Jawaban: C

⇔ Tabel untuk membuat model matematika:

	Modal (Rp)	Keuntungan (Rp)
Kue I (x)	200	40 % = 80
Kue II (y)	300	30 % = 90
	400	100.000

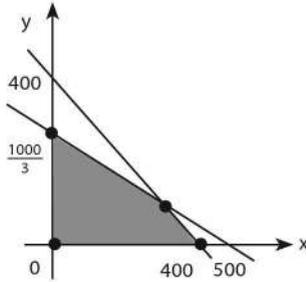
⇔ Pertidaksamaan yang memenuhi adalah:

$$x + y \leq 400 \quad \dots(1)$$

$$200x + 300y \leq 100.000 \rightarrow \text{dibagi } 100$$

$$2x + 3y \leq 1000 \quad \dots(2)$$

$$x \geq 0 \text{ dan } y \geq 0 \quad \dots(3)$$



⇔ Perpotongan garis $\left. \begin{array}{l} x + y = 400 \\ 2x + 3y = 1000 \end{array} \right\} \rightarrow \text{di titik } (200, 200)$

⇔ Titik-titik penyelesaiannya adalah $(0, 0)$, $(400, 0)$, $(200, 200)$ dan $(0, \frac{1000}{3})$

⇔ Keuntungan terbesar dari $f(x,y) = 80x + 90y$

$$(400,0) \rightarrow f = \text{Rp } 32.000,-$$

$$(200,200) \rightarrow f = \text{Rp } 34.000,- \text{ (maks)}$$

⇔ 34 % dari modalnya $(0, \frac{1000}{3}) \rightarrow f = \text{Rp } 30.000$

14. Seorang anak diharuskan makan dua jenis tablet setiap hari. Tablet pertama mengandung 5 unit vitamin A dan 3 unit vitamin B, sedangkan tablet vitamin kedua mengandung 10 unit vitamin A dan 1 unit vitamin B. Dalam satu hari anak itu memerlukan 20 unit vitamin A dan 5 unit vitamin B. Jika harga tablet pertama Rp4,00/biji dan tablet kedua Rp8,00/biji, maka pengeluaran minimum untuk pembelian tablet per hari adalah

A. Rp14,00

D. Rp16,00

B. Rp20,00

E. Rp12,00

C. Rp18,00

Jawaban: D

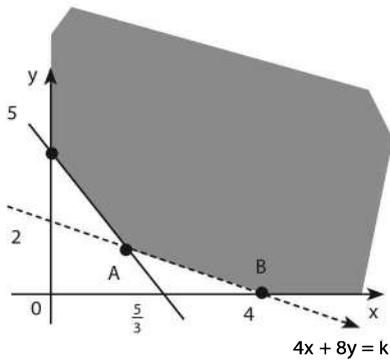
	Vit A (unit)	Vita B (unit)	Harga (Rp)
Tablet I (x)	5	3	4
Tablet II (y)	10	1	8
	20	5	

⇔ Model matematikanya adalah:

- $x + 2y \geq 4$ melalui $(4, 0)$ dan $(0, 2)$... (1)
- $3x + y \geq 5$ melalui $(\frac{5}{3}, 0)$ dan $(0, 5)$... (2)
- $x \geq 0$ dan $y \geq 0$... (3)

⇔ Fungsi pengeluaran (fungsi sasaran)

$$F = 4x + 8y \rightarrow m = -\frac{1}{2}$$



⇔ Karena $m_F = m_{AB}$, maka $F = 4x + 8y$ mempunyai nilai minimum (dilalui garis selidik paling kiri) pada setiap titik pada ruas garis AB.

⇔ Pengeluaran minimum salah satunya terjadi di $(4,0)$.

- Nilai minimum = $F(4,0)$
 $= 4(4) + 8(0) = 16$.

LATIHAN SOAL 12

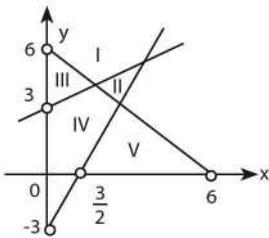
Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Himpunan penyelesaian dari sistem pertidaksamaan $\begin{cases} 4x + y \geq 8 \\ 3x + 4y \leq 24 \\ x + 6y \geq 12 \end{cases}$

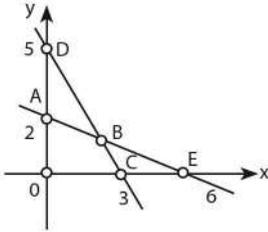
terletak dalam daerah yang berbentuk

- A. garis
B. segitiga
C. segiempat
D. segilima
E. trapesium



2. Daerah yang memenuhi penyelesaian dari $x + y > 6$, $2x - y < 3$, dan $x - 2y + 6 < 0$ ialah
- A. I
B. II
C. III
D. IV
E. V

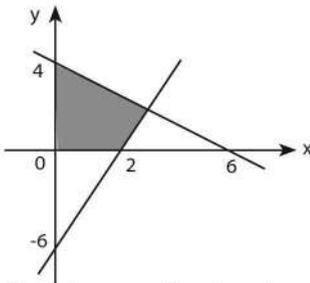
3.



Daerah yang merupakan himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan $5x + 3y \leq 15$, $x \geq 0$, $x + 3y \geq 6$, $y \geq 0$ Pada gambar di samping ialah daerah ...

- | | |
|---------|--------|
| A. OABC | D. DBE |
| B. BCD | E. ABD |
| C. BCE | |

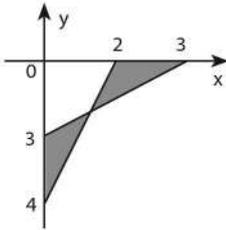
4.



Daerah yang diarsir pada gambar di atas merupakan grafik himpunan penyelesaian sistem pertidaksamaan

- | |
|--|
| A. $3x + 2y \leq 12$, $x - 3y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ |
| B. $3x + 2y \leq 12$, $x - 3y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ |
| C. $2x + 3y \leq 12$, $x - 3y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ |
| D. $2x + 3y \leq 12$, $3x - y \geq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ |
| E. $2x + 3y \leq 12$, $3x - y \leq 6$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ |

5.



Daerah yang diarsir memenuhi sistem pertaksamaan

- A. $2x - y - 4 \leq 0, x - y - 3 \leq 0, x \geq 0, y \leq 0$
- B. $2x - y - 4 \geq 0, x - y - 3 \geq 0, x \geq 0, y \leq 0$
- C. $2x - y - 4 \leq 0, x - y - 3 \geq 0, x \geq 0, y \leq 0$
- D. $(2x - y - 4)(x - y - 3) \geq 0, x \geq 0, y \leq 0$
- E. $(2x - y - 4)(x - y - 3) \leq 0, x \geq 0, y \leq 0$

6. Luas daerah pada bidang XOY yang memenuhi hubungan $|x| + |y| \leq 2$ adalah

- A. 8
- B. 6
- C. 4
- D. 2
- E. 1

SOAL LATIHAN - 1

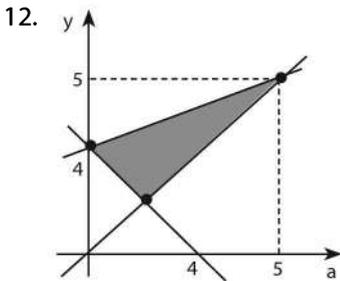
7. Nilai maksimum dari $f(x,y) = 10x + 20y$ dengan kendala $x \geq 0, y \geq 0, x + 4y \leq 120, x + y \leq 60$ adalah

- A. 400
- B. 500
- C. 600
- D. 700
- E. 800

8. Nilai maksimum dari $z = 3x + 5y$ yang memenuhi syarat $x + 2y \leq 10, x + y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0$ adalah

- A. 18
- B. 25
- C. 26
- D. 30
- E. 50

9. Fungsi $F = 10x + 15y$ dengan syarat $x \geq 0, y \geq 0, x \leq 800, y \leq 600$ dan $x + y \leq 1000$ mempunyai nilai maksimum
- A. 9.000
B. 11.000
C. 13.000
D. 15.000
E. 16.000
10. Nilai maksimum dari $4y - x$ dengan syarat $y \leq 2x; 3y \geq 2x; 2y + x \leq 20; x + y \geq 3$, adalah
- A. 32
B. 28
C. 19
D. 7
E. 4
11. Nilai maksimum dari $x + y$ yang memenuhi syarat-syarat $x \geq 0, y \geq 0, x + 2y - 6 \geq 0, 2x + 3y - 19 \leq 0$ dan $3x + 2y - 21 \leq 0$ adalah
- A. 6
B. 7
C. 8
D. 9
E. 10



Nilai minimum $f(x,y) = 2x + 3y$ untuk (x,y) di daerah yang diarsir adalah

- A. 25
B. 15
C. 12
D. 10
E. 5
13. Nilai minimum dari fungsi $F = x + y$ pada daerah yang dibatasi $4x + y \geq 12, 2x + y \leq 12, x - 2y \leq -6, x \geq 0$, dan $y \geq 0$ adalah
- A. 0
B. 3
C. 6
D. 8
E. 12

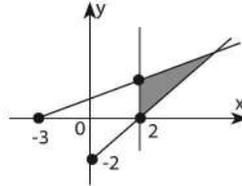
14. Nilai minimum $f(x, y) = 3 + 4x - 5y$ untuk x dan y yang memenuhi

$$\begin{cases} -x + y \leq 1 \\ x + 2y \geq 5 \text{ adalah} \\ 2x + y \geq 10 \end{cases}$$

- A. -19
- B. -6
- C. -5
- D. -3
- E. 23

15. Jika daerah yang diarsir pada diagram di bawah ini merupakan daerah penyelesaian untuk soal program linear dengan fungsi sasaran $f(x, y) = x - y$, maka nilai maksimum $f(x, y)$ adalah

- A. $f(3, 1)$
- B. $f(4, 1)$
- C. $f(2, \frac{5}{3})$
- D. $f(3, 2)$
- E. $f(2, \frac{5}{2})$



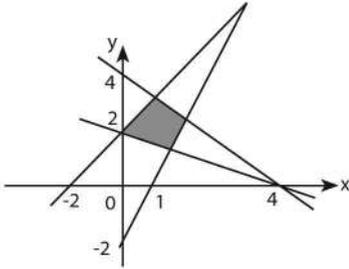
16. Jumlah dari dua bilangan real tak negatif x dan $2y$ tidak lebih besar dari pada 10. Jika $y + 8$ tidak lebih kecil daripada $2x$, maka nilai maksimum dari $3x + y$ adalah

- A. 4
- B. 12
- C. 15
- D. 18
- E. 20

17. Daerah yang memenuhi sistem pertaksamaan $x + y \leq 8$, $3 \leq x \leq 6$, $x + y \geq 5$, dan $y \geq 0$ dipenuhi oleh fungsi sasaran $f(x, y) = 4x + 5y$ dalam interval

- A. $20 \leq f \leq 37$
- B. $25 \leq f \leq 42$
- C. $20 \leq f \leq 42$
- D. $24 \leq f \leq 37$
- E. $25 \leq f \leq 41$

18.



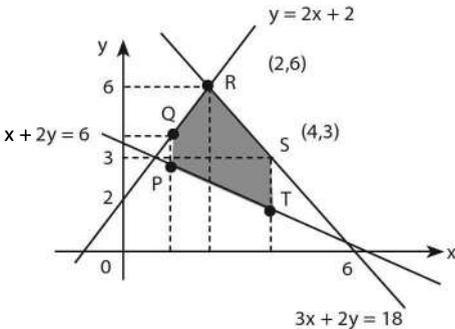
Fungsi $F(x, y) = 2x + 2y - 5$ yang didefinisikan pada daerah yang diarsir, mencapai maksimum pada

- A. $\{(x, y) \mid x = 1, y = 3\}$
- B. $\{(x, y) \mid x = 2, y = 3\}$
- C. $\{(x, y) \mid x = 0, y = 2\}$
- D. $\{(x, y) \mid y - x = 2\}$
- E. $\{(x, y) \mid x + y = 4\}$

19. Agar fungsi $f(x, y) = ax + 10y$ dengan kendala $2x + y \geq 12, x + y \geq 10, x \geq 0, y \geq 0$ mencapai minimum hanya di titik $(2, 8)$, maka konstanta a memenuhi

- A. $-20 \leq a \leq -10$
- B. $-10 \leq a \leq 10$
- C. $10 \leq a \leq 20$
- D. $10 < a \leq 20$
- E. $10 < a < 20$

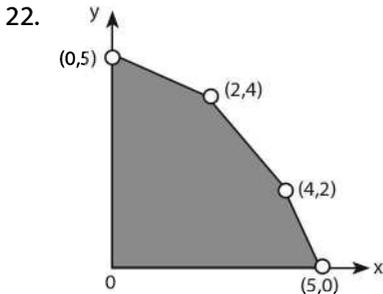
20.



Pada daerah yang diarsir, fungsi objektif $z = 10x + 5y$ mencapai nilai maksimum di titik

- A. P
- B. Q
- C. R
- D. S
- E. T

21. Jika fungsi $z = x - 2y$ dengan syarat $x + y \geq 8$, $2x + y \leq 12$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ mempunyai nilai maksimum M dan nilai minimum m , maka $M - m =$
- A. -28
B. 4
C. 12
D. 22
E. 20



Himpunan penyelesaian masalah suatu program linear diberikan sebagai daerah diwarnai gelap pada gambar di atas. Fungsi tujuan $f(x, y) = x + y$ mencapai maksimum di

- A. titik (4, 2) saja
B. titik (2, 4) saja
C. sepanjang garis dari (5, 0) ke (4, 2)
D. sepanjang garis dari (0, 5) ke (2, 4)
E. sepanjang garis dari (2, 4) ke (4, 2)

SOAL LATIHAN - 1

23. Suatu pabrik roti memproduksi 120 kaleng roti setiap hari. Roti terdiri dari dua jenis, roti asin dan roti manis, setiap hari roti asin diproduksi paling sedikit 30 kaleng, yang roti manis 50 kaleng. Susunlah model matematika soal ini, misalkan roti asin sebanyak x kaleng dan roti manis y kaleng!
- A. $x + y \leq 120$, $x \geq 30$, $y \geq 50$, $x, y \in \mathbb{C}$
B. $x + y \geq 120$, $x \geq 30$, $y \geq 50$, $x, y \in \mathbb{C}$
C. $x + y \leq 120$, $x \geq 30$, $y \leq 50$, $x, y \in \mathbb{C}$
D. $x + y = 120$, $x \geq 30$, $y \geq 50$, $x, y \in \mathbb{C}$
E. $x + y = 120$, $x = 30$, $y = 50$, $x, y \in \mathbb{C}$

24. Dari suatu persegi panjang, panjangnya lebih 3 cm daripada lebarnya. Jika lebarnya x cm dan luasnya paling sedikit 15 cm^2 , maka sistem pertidaksamaan yang harus dipenuhi oleh x adalah
- A. $x > 0, x(x + 3) \geq 15$ D. $x > 0, x(x - 3) \leq 15$
 B. $x > 0, x(x - 3) \geq 15$ E. $x > 0, 3x^2 \geq 15$
 C. $x > 0, x(x + 3) \leq 15$
25. Pesawat penumpang mempunyai tempat duduk 48 kursi. Setiap penumpang kelas utama boleh membawa bagasi 60 kg sedang kelas ekonomi 20 kg. Pesawat hanya dapat membawa bagasi 1.440 kg. Harga tiket kelas utama Rp150.000,00 dan kelas ekonomi Rp100.000,00. Supaya pendapatan dari penjualan tiket pada saat pesawat penuh mencapai maksimum, jumlah tempat duduk kelas utama haruslah
- A. 12 D. 26
 B. 20 E. 30
 C. 24
26. Seorang pedagang khusus menjual produk A dan produk B. Produk A dibeli seharga Rp2.000,00 per unit, dijual dengan laba Rp 800,00. Produk B dibeli seharga Rp4.000,00 per unit, dijual dengan laba Rp600,00. Jika ia mempunyai modal Rp1.600.000,00 dan gudangnya mampu menampung paling banyak 500 unit, maka keuntungan terbesar diperoleh bila ia membeli
- A. 300 unit produk A dan 200 unit produk B
 B. 200 unit produk A dan 300 unit produk B
 C. 300 unit produk A dan 300 unit produk B
 D. 500 unit produk A saja
 E. 400 unit produk B saja

27. Untuk dapat diterima di suatu perguruan tinggi harus lulus tes Matematika dengan nilai tidak kurang dari 7 dan tes Biologi dengan nilai tidak kurang dari 5, sedangkan jumlah nilai Matematika dan Biologi tidak boleh kurang dari 13. Seorang calon dengan jumlah dua kali nilai Matematika dan tiga kali nilai Biologi sama dengan 30. Calon itu
- pasti ditolak
 - pasti diterima
 - diterima asal nilai Matematika lebih dari 9
 - diterima asal nilai Biologi tidak kurang dari 5
 - diterima hanya bila nilai Biologi 6
28. Rokok A yang harga belinya Rp1000,00 dijual dengan harga Rp1.100,00 per bungkus sedangkan rokok B yang harga belinya Rp1.500,00 dijual dengan harga Rp1.700,00 per bungkus. Seorang pedagang rokok yang mempunyai modal Rp300.000,00 dan kiosnya dapat menampung paling banyak 250 bungkus rokok akan mendapat keuntungan maksimum jika ia membeli
- 150 bungkus rokok A dan 100 bungkus rokok B
 - 100 bungkus rokok A dan 150 bungkus rokok B
 - 250 bungkus rokok A dan 200 bungkus rokok B
 - 250 bungkus rokok A saja
 - 200 bungkus rokok B saja
29. Jika luas bidang yang dibatasi oleh garis $y = \frac{3}{2}x$, $y = 500 - x$ dan sumbu x serta antara $x = a$ dan $x = b$ menyatakan banyaknya karyawan suatu pabrik yang berpenghasilan antara a ribu dan b ribu rupiah, maka karyawan yang berpenghasilan di atas 400.000 rupiah adalah
- $\frac{2}{5}$ bagian
 - $\frac{1}{3}$ bagian
 - $\frac{1}{5}$ bagian
 - $\frac{2}{15}$ bagian
 - $\frac{1}{15}$ bagian

30. Sebuah pabrik menggunakan bahan A, B, dan C untuk memproduksi 2 jenis barang, yaitu barang jenis I dan jenis II. Sebuah barang jenis I memerlukan 1 kg bahan A, 3 kg bahan B, dan 2 kg bahan C. Sedangkan barang jenis II memerlukan 3 kg bahan A, 4 kg bahan B, dan 1 kg bahan C. Bahan baku yang tersedia 480 kg bahan A, 720 kg bahan B, dan 360 kg bahan C. Harga barang jenis I adalah Rp40.000,00 dan harga barang jenis II adalah Rp60.000,00. Pendapatan maksimum yang diperoleh adalah
- A. Rp7.200.000,00
 - B. Rp9.600.000,00
 - C. Rp10.080.000,00
 - D. Rp10.560.000,00
 - E. Rp12.000.000,00



MATRIKS

13

A. PENGERTIAN, KESAMAAN, DAN TRANSPOSE MATRIKS

a. Pengertian Matriks

Matriks adalah susunan elemen-elemen yang berbentuk persegi panjang yang diatur di dalam baris dan kolom dengan posisi tertentu sesuai dengan nomor baris dan kolomnya.

$$\text{Bentuk umum matriks: } A_{(m \times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks A memiliki banyaknya baris m dan banyaknya kolom n artinya matriks A berordo $(m \times n)$ ditulis $A_{(m \times n)}$

b. Kesamaan Matriks

Dua buah matriks dikatakan sama jika dan hanya jika memiliki ordo sama dan elemen-elemen yang seletak sama nilainya.

$$\text{Contoh: matriks } A = \begin{pmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \rightarrow A=B$$

c. Transpose Matriks

Transpose matriks adalah matriks baru yang diperoleh dari matriks lain dengan menukar elemen kolom menjadi elemen baris dan sebaliknya.

$$\text{Contoh: matriks } A_{(2 \times 3)} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \textcircled{R} A^t_{(3 \times 2)} = A'_{(3 \times 2)} = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}$$

B. OPERASI MATRIKS

a. Penjumlahan dan Pengurangan Matriks

- **Syarat** matriks A dan matriks B bisa dijumlahkan atau dikurangkan apabila kedua matriks tersebut memiliki **ordo** yang sama.
- Caranya adalah menjumlahkan atau mengurangkan elemen matriks A dengan elemen matriks B yang seletak.

$$\text{Proses: } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \pm e & b \pm f \\ c \pm g & d \pm h \end{pmatrix}$$

b. Perkalian Matriks

Perkalian skalar dengan matriks:

- Jika skalar **k** dikalikan dengan matriks **A**, maka matriks hasilnya **kA** diperoleh dengan mengalikan k dengan setiap elemen matriks A.

$$\text{Proses: } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow k.A = \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}$$

Perkalian dua buah matriks:

- Syarat matriks A dan matriks B dapat dikalikan jika banyaknya kolom matriks A sama dengan banyaknya baris matriks B.

$$A_{(m \times n)} \cdot B_{(n \times p)} = C_{(m \times p)}$$

- Caranya adalah mengalikan elemen matriks A dengan elemen kolom matriks B yang seletak kemudian jumlahkan.

Proses: a.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bf \\ ce + df \end{pmatrix}$$

b.
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{pmatrix}$$

Sifat perkalian matriks:

- tidak komutatif: $A.B \neq B.A$
- asosiatif : $(A.B).C = A.(B.C)$
- distributif : $A.(B + C) = (A.B) + (A.C)$
- identitas : $I.A = A.I = A$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix}$ dan $C = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Apabila $B - A = C'$ dan C' = transpose matriks C, maka nilai $x.y = \dots$

- A. 10
- B. 15
- C. 20
- D. 25
- E. 30

Jawaban: C

$\Leftrightarrow B - A = C'$

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y-2 & 3 \\ 2 & y-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

⇔ Dari persamaan di atas diperoleh:

- $y - 4 = 1 \rightarrow y = 5$
- $x + y - 2 = 7$
 $x + 5 - 2 = 7 \rightarrow x = 4$

⇔ $x \cdot y = (4) \cdot (5) = 20$

2. Jika $\begin{pmatrix} {}^x\log a & \log(2a-2) \\ \log(b-4) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log b & 1 \\ \log a & 1 \end{pmatrix}$ maka $x = \dots$

- A. 6
- B. 10
- C. 1
- D. 10
- E. 4

Jawaban: A

⇔ $\begin{pmatrix} {}^x\log a & \log(2a-2) \\ \log(b-4) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log b & 1 \\ \log a & 1 \end{pmatrix}$

Dari persamaan di atas diperoleh:

- $\log(2a-2) = 1$
 $2a - 2 = 10 \rightarrow a = 6$
- $\log(b-4) = \log(6)$
 $b - 4 = 6 \rightarrow b = 10$
- ${}^x\log 6 = \log 10 = 1 \rightarrow x = 6$

3. Jika matriks $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ maka matriks $2MN - NM$
=

- A. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- C. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- E. $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow 2MN - NM$$

$$\begin{aligned} &= 2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nilai $x -$

$y = \dots$

A. $\frac{5}{2}$

D. $\frac{22}{2}$

B. $\frac{15}{2}$

E. $\frac{23}{2}$

C. $\frac{19}{2}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ x & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10 - 2x & -5 - 2x - 2y \\ 18 - 4x & -9 - 4x - 4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh

- $10 - 2x = 1 \rightarrow x = \frac{9}{2}$

- $-5 - 2x - 2y = 0$

untuk $x = \frac{9}{2} \rightarrow -5 - 2\left(\frac{9}{2}\right) - 2y = 0$

$$-5 - 9 - 2y = 0$$

$$y = -7$$

$$\Leftrightarrow \text{jika } x - y = \frac{9}{2} - (-7) = \frac{23}{2}$$

5. Diberikan dua matriks A dan B sebagai berikut $A = \begin{pmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B = \begin{pmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ jika $AB = BA$, maka $\frac{k}{m} = \dots$

A. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{10}{45}$

B. $-\frac{3}{4}$ E. 2

C. $\frac{3}{4}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow AB = BA$$

$$\begin{pmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & m \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & k \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 45 & 5m + 5k \\ 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 & 9k + 2m \\ 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh

$$5M + 5K = 9K + 2M$$

$$3K = 4K$$

$$\frac{k}{m} = \frac{3}{4}$$

C. DETERMINAN, INVERS, DAN APLIKASI MATRIKS

a. Determinan Matriks

- Matriks A mempunyai determinan (det) jika matriks A adalah matriks bujur sangkar.

Proses: a. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A| = ad - bc$

b. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \rightarrow \det A = |A|$

$$= (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

- Matriks yang determinannya nol disebut matriks singular.
- Sifat determinan matriks:
 - $\det(k.A) = k^n \cdot (\det A)$ $k =$ konstanta dan $A_{(n \times n)}$
 - Jika $A.B = C$, maka $\det A \cdot \det B = \det C$

b. Invers Matriks

- Matriks A memiliki invers jika matriks A bujur sangkar dan $|A| \neq 0$.

Proses: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$$- A.A^{-1} = A^{-1}.A = I$$

$$- \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- Sifat Invers matriks:

$$- (A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

$$- A.I = I.A = A$$

c. Aplikasi Matriks

- Menyelesaikan persamaan matriks:

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}}_A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_C \rightarrow A.B = C \rightarrow B = A^{-1}.C$$

- **Cara determinan matriks:**

$$\left. \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right\} \rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \text{ dan } y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

6. Diketahui matrik $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ dan $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Matriks $(A - kI)$ adalah matriks singular untuk nilai $k = \dots$

- A. -2 atau 5
 B. -5 atau 2
 C. 2 atau 5
 D. 3 atau 4
 E. 1 atau 2

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (A - kI) &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Matriks A singular jika determinan matriks A bernilai 0

$$|A - kI| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-k & 4 \\ 3 & 1-k \end{vmatrix} = 0$$

$$(2-k)(1-k) - 12 = 0$$

$$k^2 - 3k - 10 = 0$$

$$(k-5)(k+2) = 0$$

\Leftrightarrow Nilai k yang memenuhi adalah $k = 5$ dan $k = -2$

7. Jika , $A = \begin{pmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{pmatrix}$ maka jumlah semua nilai x sehingga $\det A =$

27 adalah

- A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2x+1 & x-1 \\ 3 & x \end{vmatrix} = 27$$

$$x(2x+1) - 3(x-1) = 27$$

$$2x^2 + x - 3x + 3 = 27$$

$$2x^2 - 2x - 24 = 0 \rightarrow \text{di bagi 2}$$

$$x^2 - x - 12 = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 1$$

8. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix}$, dan determinan matriks AB

adalah 3, maka nilai $c - b$ adalah

- A. -2
B. -1
C. 0
D. 1
E. 2

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 3 \\ b & 2 \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b-c & 3 \\ -b+c & 0 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Determinan $AB = 3$

$$\begin{vmatrix} a+b-c & 3 \\ -b+c & 0 \end{vmatrix} = 3$$

$$0 - 3(c-b) = 3 \rightarrow c-b = -1$$

9. Hasil kali semua nilai x sehingga matriks $\begin{pmatrix} x^2+2x & x-10 \\ x+2 & x-6 \end{pmatrix}$ tidak mempunyai invers adalah
- A. 20
B. -10
C. 10
- D. -20
E. 9

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{Misal matriks } A = \begin{pmatrix} x^2+2x & x-10 \\ x+2 & x-6 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Matriks A tidak mempunyai invers, maka $|A|=0$

$$(x^2+2x)(x-6)-(x+2)(x-10)=0$$

$$(x^3-4x^2-12x)-(x^2-8x-20)=0$$

$$x^3-5x^2-4x+20=0$$

Dari persamaan di atas:

- $a=1$, $b=-5$, $c=-4$, dan $d=20$

- $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a} = -20$

10. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ Invers matriks AB adalah $(AB)^{-1} = \dots$

A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow AB = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{(-2)(-1) - (-1)(-4)} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

11. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. Jika $M = A + B$, maka invers M adalah $M^{-1} = \dots$

A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3\frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -7 & -8 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -7 & 8 \end{pmatrix}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow M = A + B$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M^{-1} = \frac{1}{16 - 14} \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

12. Jika $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, dan $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, maka determinan

matriks B adalah

A. $-\frac{2}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

E. 1

C. $\frac{1}{3}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow B \cdot A = I$$

$$B = A^{-1} \cdot I = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Determinan matriks B

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{8}{9} - \frac{5}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

SOLUSI SMART!



$$B \cdot A = I$$

$$\det B \cdot \det A = \det I$$

$$\det B = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{8-5} = \frac{1}{3}$$

13. Matriks P yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ adalah

A. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -6 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_A \cdot P = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}}_B$$

$$P = A^{-1} \cdot B$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2m-7 & 3 \end{pmatrix}$. Nilai m

yang memenuhi $A^{-1} \cdot B = C$ (A^{-1} invers matriks A) adalah

A. -4

D. 3

B. -3

E. 4

C. 1

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot B = C$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2m-7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2m-7 & 3 \end{pmatrix}$$

⇔ Dari persamaan di atas diperoleh:
 $2m-7=1 \rightarrow m=4$

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow A^{-1} \cdot B = C$$

$$|A^{-1}| \cdot |B| = |C|$$

$$\frac{|B|}{|A|} = |C|$$

$$\frac{-2}{-1} = \{-3 + (10m - 35)\} \rightarrow m = 4$$

15. Jika matriks A memenuhi $A \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$, maka det A =

- | | |
|-------|------|
| A. -3 | D. 1 |
| B. -2 | E. 2 |
| C. -1 | |

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

- $A \cdot B = C \rightarrow |A| \cdot |B| = |C|$

$$\Leftrightarrow A \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}_B = \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}_C$$

$$|A| \cdot |B| = |C| \rightarrow |A| \cdot (10) = (10)$$

$$|A| = 1$$

16. Jika M adalah matriks sehingga $M \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{pmatrix}$, maka determinan matriks M adalah
- 9A. -2
 B. -1
 C. 0
 D. 1
 E. 2

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow M \times \underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}_A = \underbrace{\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ -c & -d \end{pmatrix}}_B$$

$$\det(M) \cdot \det A = \det B$$

$$\det(M) \cdot (ad - bc) = -ad - cd + bc + cd$$

$$\det(M) \cdot (ad - bc) = (bc - ad)$$

$$\det(M) = \frac{ad - bc}{bc - ad} = -1$$

17. Transpos matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah $A^T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$. Jika $A^T = A^{-1}$, maka $ad - bc = \dots$
- A. -1 atau $-\sqrt{2}$
 B. 1 atau $\sqrt{2}$
 C. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$
 D. -1 atau 1
 E. 1 atau $-\sqrt{2}$

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$$

$$\det A^T = \det A^{-1}$$

$$\det A^T = \frac{1}{\det A}$$

$$(\det A^T) \cdot (\det A) = 1$$

$$(ad - bc)^2 = 1$$

$$ad - bc = \pm 1$$

18. Jika x dan y memenuhi sistem persamaan $\begin{cases} x + y = 4 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$, nilai $3x + 2y$ sama dengan

- A. 7
B. 9
C. 11
D. 13
E. 15

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_P = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}}_B$$

$$AP = B$$

$$P = A^{-1} \cdot B$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

- $x = 1$ dan $y = 3$

$$\Leftrightarrow 3x + 2y = 3(1) + 2(3) = 9$$

LATIHAN SOAL 13

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Diketahui persamaan matriks $A = 2B^t$ (B^t adalah transpose matriks B), dengan $A = \begin{pmatrix} a & 4 \\ 2b & 3c \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 2c-3b & 2a+1 \\ a & b+7 \end{pmatrix}$. Nilai $a + b + c = \dots$
- A. 6
B. 10
C. 13
D. 15
E. 16
2. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, maka $(A + B)^2$ adalah
- A. $\begin{pmatrix} 24 & 10 \\ -10 & 24 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 10 & 24 \\ 24 & -10 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 24 & 24 \end{pmatrix}$
D. $\begin{pmatrix} -24 & 10 \\ 10 & -24 \end{pmatrix}$
E. $\begin{pmatrix} -24 & -10 \\ -10 & -24 \end{pmatrix}$

3. Diketahui persamaan matriks:

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 1 & q+1 \end{pmatrix}$$

maka nilai $p + q = \dots$

- A. -3
B. -1
C. 1
D. 2
E. 3

4. Jika $\begin{pmatrix} a & -1 \\ b & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & c \\ d & 3 \end{pmatrix}$, maka $c \cdot d$ adalah

- A. 2
B. 1
C. 0
D. -1
E. -2

5. $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, maka $p^2 + q^2$ dinyatakan dalam x dan y adalah

- A. $(x-y)^2$
B. $2(x-y)^2$
C. $2(x+y)^2$
D. $2(x^2 - y^2)$
E. $2(x^2 + y^2)$

6. Jika $\begin{pmatrix} x-5 & 4 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -16 & 5 \end{pmatrix}$, maka

- A. $y = 3x$
B. $y = 2x$
C. $y = x$
D. $y = \frac{x}{3}$
E. $y = \frac{x}{2}$

7. Bentuk $(xy) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 5$ merupakan persamaan

- A. lingkaran
B. ellips
C. parabola
D. hiperbola
E. dua garis berpotongan

8. Jika $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ maka $(x \ y)R^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dots$
- A. $(x^2 + xy - y^2)$ D. $(x^2 + y^2)$
 B. $(x^2 - 2xy - y^2)$ E. $(x^2 - y^2)$
 C. $(x^2 - 2xy + y^2)$
9. Diketahui $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ -4 & -10 \end{pmatrix}$, dan $A^2 = xA + yB$. Nilai xy =
- A. -4 D. $\frac{3}{2}$
 B. -1 E. 2
 C. $-\frac{1}{2}$
10. Diketahui: $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Bentuk $p^2 + q^2$ dinyatakan dalam x dan y adalah
- A. $(x - y)^2$ D. $2(x^2 - y^2)$
 B. $2(x - y)^2$ E. $2(x^2 + y^2)$
 C. $2(x + y)^2$
11. Diketahui hasil kali matriks $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$.
 Nilai $a + b + c + d = \dots$
- A. 6 D. 9
 B. 7 E. 10
 C. 8
12. Jika matriks $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 3 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$, maka $A^2 - 2A + I$ adalah ...
- A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

13. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, dan $C = (2 \ -1)$.

Jika $A^T \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} x & 3 \\ 2 & y \end{pmatrix}$ (A^T = transpos dari A), maka

A. $x = -3$ dan $y = -1$

D. $x = -6$ dan $y = -1$

B. $x = -6$ dan $y = 2$

E. $x = 3$ dan $y = 2$

C. $x = 3$ dan $y = 1$

SOAL LATIHAN - 2

14. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 6 & p \\ -7 & 6 \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ memiliki determinan yang sama. Nilai p yang memenuhi adalah

A. -7

D. 4

B. -5

E. 5

C. 3

15. Jika $A = \begin{pmatrix} 3x & 2x \\ 5 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2x & 5 \end{pmatrix}$, dan $\det A = \det B$, maka nilai x yang memenuhi adalah

A. 2 atau 3

D. -1 atau 3

B. -2 atau 3

E. 3 atau 5

C. -3 atau 1

16. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Nilai $k \cdot \det A^T = \det A^{-1}$ yang

memenuhi ($\det = \text{determinan}$) adalah

- A. 81
- B. 9
- C. 1
- D. $\frac{1}{9}$
- E. $\frac{1}{81}$

17. Jika a bilangan bulat, matriks $\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ a & 1 & a \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ tidak punya invers untuk $a = \dots$
- A. 5
 - B. 4
 - C. 3
 - D. 2
 - E. 1

18. Jika $A = \begin{pmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, dan determinan matriks AB adalah 6, maka nilai $(a^2 - 3a)$ adalah
- A. -2
 - B. -1
 - C. 0
 - D. 1
 - E. 2

19. Jika $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, dan $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka determinan dari matriks $(A + B)^2$ adalah
- A. -3
 - B. -2
 - C. 0
 - D. 2
 - E. 3

20. Diketahui matriks $P = \begin{pmatrix} x & 2 \\ 3 & 2x \end{pmatrix}$ dan $O = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & x \end{pmatrix}$. Agar determinan matriks P sama dengan dua kali determinan matriks O , maka nilai x adalah
- A. 6 dan -2
 - B. 6 dan -3
 - C. 6 dan 2
 - D. 3 dan -4
 - E. 3 dan 4

21. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, dan $P_{(2 \times 2)}$. Jika matriks, matriks P adalah

A. $\begin{pmatrix} 13 & -18 \\ -8 & 10 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -21 & 8 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 21 & -8 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 14 & 12 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -13 & 18 \\ 8 & -10 \end{pmatrix}$

22. Diketahui $A = \begin{pmatrix} x+1 & 3 & 1 \\ 0 & x+1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ Penyelesaian x yang memenuhi $|A| = 0$ adalah

A. 1

D. $x \geq 2$ atau $x \leq 1$

B. 2

E. tidak ada

C. $1 \leq x \leq 2$

23. Determinan matriks $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{pmatrix}$ adalah

A. $(a - b)(b - c)(c - a)$

D. $(a + b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

B. $(a + b)(b - c)(c - a)$

E. $(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c)$

C. $(a - b)(b - c)(c - a)(a - b - c)$

24. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, dan C memenuhi $AC = B$, maka matriks C adalah

A. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

25. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2k+3 & -12 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} 5 & 11 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Nilai k yang memenuhi $A + B = C^{-1}$ (C^{-1} invers matriks C) adalah
- A. 2
B. 0
C. -2
D. -3
E. -8
26. Jika invers dari $P = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$ adalah $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 3 & c \end{pmatrix}$, maka konstanta c adalah
- A. $\frac{1}{3}$
B. 0
C. $-\frac{1}{3}$
D. -2
E. -5
27. Diketahui matriks-matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, bila B^T menyatakan transpose matriks B . Jika $\det(2AB) = k \cdot \det(AB)^{-1}$, maka $k = \dots$
- A. 2
B. 3
C. 12
D. 24
E. 36
28. Jika invers dari $A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ adalah $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka konstanta b adalah
- A. -4
B. -2
C. -1
D. 0
E. 1
29. Diketahui persamaan matriks $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} q & p \\ s & r \end{pmatrix}$ dengan p, q, r, s konstanta real dan $ps \neq qr$. X adalah matriks

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

30. Jika, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ maka

A. $x = 3$ dan $y = 1$

D. $x = 2$ dan $y = 1$

B. $x = 1$ dan $y = 1$

E. $x = 1$ dan $y = 2$

C. $x = 2$ dan $y = 2$

31. Jika $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, maka $2A$ sama dengan

A. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 4 & -8 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

32. Untuk matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ dengan $\det A = 1$, jika matriks B adalah

invers dari A dan $B^2 = \begin{pmatrix} 14 & -5 \\ -25 & 9 \end{pmatrix}$, maka $a + b = \dots$

A. 2

D. 5

B. 3

E. 6

C. 4

33. Diketahui $M = \begin{pmatrix} a & a+4 \\ 5 & a+1 \end{pmatrix}$, dengan $A \geq 0$. Jika determinan matriks M sama dengan 1, maka M^{-1} sama dengan

A. $\begin{pmatrix} 8 & -11 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 7 & -11 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 7 & 11 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

34. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$. Nilai k yang memenuhi $k \cdot \det A^T = \det A^{-1}$ ($\det = \text{determinan}$) adalah

A. 2

D. $\frac{1}{2}$

B. $1\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{4}$

C. 1

35. Determinan matriks K yang memenuhi persamaan $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sama dengan

A. 3

D. -2

B. 1

E. -3

C. -1

36. Jika $A = \begin{pmatrix} 7 & \frac{k}{2} \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ dan A^{-1} merupakan matriks invers dari A . A dan A^{-1} mempunyai determinan yang sama dan positif, maka nilai k sama dengan

A. $\frac{35}{3}$

D. $-\frac{34}{3}$

B. -12

E. 12

C. $\frac{34}{3}$

37. Jika A, B, dan C matriks 2x2 yang memenuhi $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dan

$CB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, maka CA^{-1} adalah

A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ E. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

38. Jika $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka jumlah semua unsur matriks A^{-1} adalah

....

A. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

B. $\frac{5}{2}$ E. $\frac{15}{2}$

C. $\frac{6}{2}$

39. Jika A, B, dan P matriks berukuran 2x2, $\det A = 4$, $\det(P) \neq 0$, dan $PA = BP$, maka nilai $\det A - \det B$ adalah

A. 0 D. 3

B. 1 E. 4

C. 2

40. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ dan $B = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Jika $AC = B$ dan C^{-1}

adalah invers dari matriks C, maka determinan dari C^{-1} adalah

A. -2 D. 2

B. -1 E. 3

C. 1



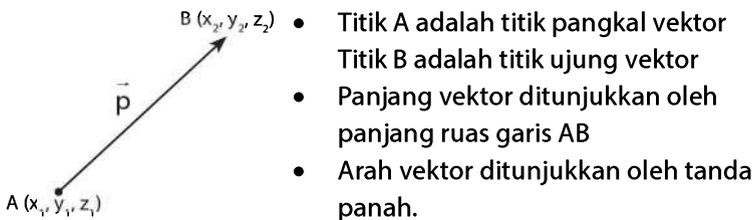
VEKTOR

14

A. NOTASI VEKTOR, BESAR VEKTOR, DAN VEKTOR SATUAN

Vektor adalah besaran yang memiliki besar (panjang vektor) dan arah (arah panah vektor).

Beberapa hal dasar yang berhubungan dengan vektor:



- **Vektor posisi** adalah vektor yang titik pangkalnya di $O(0,0)$.

$\overline{OA} = \vec{a}$ adalah vektor posisi dari titik A.

$\overline{OB} = \vec{b}$ adalah vektor posisi dari titik B.

- Elemen vektor \vec{p} atau $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

- $-\vec{p}$ adalah vektor yang arahnya berlawanan dan sama panjang dengan vektor \vec{p} .

- Notasi vektor \vec{a} atau $\overline{AB} = (x \ y \ z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$
- Panjang (besar) vektor \vec{p} atau \overline{AB} adalah:

$$|\vec{p}| = |\overline{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
- Vektor satuan dari vektor \vec{p} = vektor yang panjangnya satu satuan dan searah vektor \vec{p} . Vektor satuan \vec{p} adalah $\hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|}$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diketahui titik A(3, 2, -3) dan B(0, 4, -2), tentukan:
 - A. vektor \overline{AB}
 - B. panjang vektor \overline{AB}
 - C. vektor satuan dari vektor \overline{AB}

Pembahasan:

- A. $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$

$$= (0, 4, -2) - (3, 2, -3)$$

$$= (-3, 2, 1)$$

$$= -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$$
- B. panjang vektor \overline{AB} adalah $|\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$
- C. vektor satuan $\overline{AB} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|}$

$$= \frac{1}{\sqrt{14}}(-3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k})$$

2. Tentukan nilai c agar panjang vektor $\vec{a} = (2+c)\hat{i} + 3\hat{j} + (c-2)\hat{k}$ adalah 5!

Pembahasan:

$$\Leftrightarrow |\vec{a}| = 5$$

$$\sqrt{(2+c)^2 + 3^2 + (c-2)^2} = 5$$

$$(4 + 4c + c^2) + 9 + (c^2 - 4c + 4) = 25$$

$$2c^2 + 17 = 25$$

$$2c^2 = 8$$

$$c^2 = 4$$

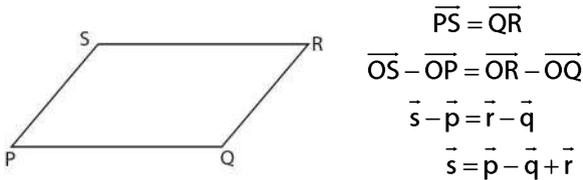
$$c = \pm 2$$

3. Jika $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ dan berturut-turut adalah vektor posisi titik-titik sudut jajaran genjang PQRS dengan PQ sejajar SR, maka $\vec{s} \dots$

- | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|
| A. $-\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ | D. $\vec{p} - \vec{q} - \vec{r}$ |
| B. $-\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ | E. $\vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$ |
| C. $\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$ | |

Jawaban: C

\Leftrightarrow PQRS adalah jajar genjang, maka berlaku hubungan:



4. O adalah titik awal. Jika \vec{a} adalah vektor posisi dari titik A, \vec{b} adalah vektor posisi dari titik B, \vec{c} adalah vektor posisi dari titik C. $\overline{CD} = \vec{b}$, $\overline{BE} = \vec{a}$, dan $\overline{DP} = \overline{OE}$, maka vektor posisi titik P adalah

- | | |
|------------------------------------|------------------------------------|
| A. $-\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ | D. $\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ |
| B. $\vec{a} - 2\vec{b} - \vec{c}$ | E. $-\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ |
| C. $-\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$ | |

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \vec{b} \rightarrow \vec{d} - \vec{c} = \vec{b} \rightarrow \vec{d} = \vec{b} + \vec{c} \quad \dots (1)$$

$$\overline{BE} = \vec{a} \rightarrow \vec{e} - \vec{b} = \vec{a} \rightarrow \vec{e} = \vec{a} + \vec{b} \quad \dots (2)$$

$$\Leftrightarrow \overline{DP} = \overline{OE} \rightarrow \vec{p} - \vec{d} = \vec{e}$$

$$\vec{p} = \vec{d} + \vec{e}$$

$$= (\vec{b} + \vec{c}) + (\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$$

B. PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN VEKTOR

Penjumlahan dan pengurangan dua buah vektor atau lebih bisa dilakukan dengan:

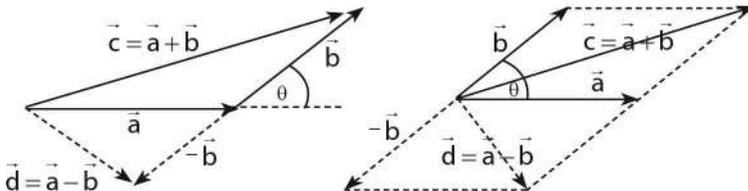
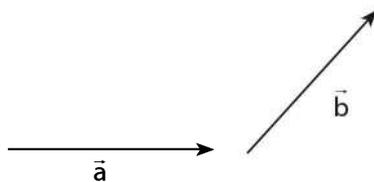
a. Cara Elemen

Misal: vektor $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ dan $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, maka:

- $(\vec{a} + \vec{b}) = (a_1 + b_1)\vec{i} + (a_2 + b_2)\vec{j} + (a_3 + b_3)\vec{k}$
- $(\vec{a} - \vec{b}) = (a_1 - b_1)\vec{i} + (a_2 - b_2)\vec{j} + (a_3 - b_3)\vec{k}$

b. Cara Segitiga dan Jajargenjang

Misal diketahui vektor \vec{a} dan vektor \vec{b} , dan θ adalah sudut antara vektor \vec{a} dan \vec{b} , maka panjang $|\vec{a} + \vec{b}|$ dan $|\vec{a} - \vec{b}|$ dapat ditentukan dengan **aturan cosinus pada sebuah segitiga**.



- $|\vec{c}|^2 = |\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$
- $|\vec{d}|^2 = |\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos \theta$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

5. Diketahui vektor $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} - 3\hat{k}$, dan $\vec{c} = \hat{j} - 2\hat{k}$. Vektor yang mewakili $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$ adalah

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------------------|
| A. $12\hat{i} - 5\hat{j} + 12\hat{k}$ | D. $-3\hat{i} - 3\hat{j} + 9\hat{k}$ |
| B. $-3\hat{j} + 9\hat{k}$ | E. $3\hat{i} - \hat{j} + 9\hat{k}$ |
| C. $-7\hat{j} - 9\hat{k}$ | |

Jawaban: B

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} &= 2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} = -3\hat{j} + 9\hat{k}
 \end{aligned}$$

6. Jika $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ dan sudut $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = 120^\circ$, maka $|3\vec{a} + 2\vec{b}| = \dots$

- | | |
|-------|-------|
| A. 5 | D. 12 |
| B. 6 | E. 13 |
| C. 10 | |

Jawaban: B

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow |3\vec{a} + 2\vec{b}| \\
 = \sqrt{|3\vec{a}|^2 + |2\vec{b}|^2 + 2|3\vec{a}| \cdot |2\vec{b}| \cdot \cos \theta}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{(6)^2 + (6)^2 + 2(6)(6) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &= \sqrt{36 + 36 - 36} = \sqrt{36} = 6
 \end{aligned}$$

7. Jika besar sudut antara vektor \vec{p} dan \vec{q} adalah 60° . Jika panjang p dan q masing-masing 10 dan 6, maka panjang vektor $(\vec{p} - \vec{q})$ sama dengan

- A. 4
 B. 9
 C. 14
 D. $2\sqrt{17}$
 E. $2\sqrt{19}$

Jawaban: B

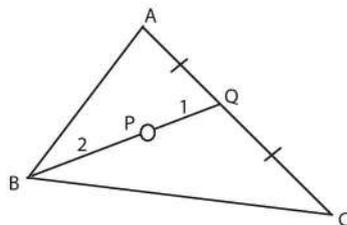
$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow |\vec{p} - \vec{q}| &= \sqrt{|\vec{p}|^2 + |\vec{q}|^2 - |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \cos \theta} \\
 &= \sqrt{100 + 36 - 2 \cdot 10 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2}}
 \end{aligned}$$

8. Dalam $\triangle ABC$, diketahui P titik berat $\triangle ABC$ dan Q titik tengah AC . Jika $\vec{CA} = \vec{u}$ dan $\vec{CB} = \vec{v}$ dan , maka $PQ = \dots$

- A. $-\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$
 B. $-\frac{1}{3}\vec{u} + \vec{v}$
 C. $-\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$
 D. $\frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v}$
 E. $\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \vec{CA} &= \vec{u} \\
 \vec{CB} &= \vec{v} \\
 \Leftrightarrow \vec{PQ} &= \frac{1}{3}\vec{BQ} \\
 &= \frac{1}{3}(\vec{BC} + \vec{CQ})
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3} \left(\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CA} \right) \\
&= \frac{1}{3} (-\vec{v}) + \frac{1}{6} (\vec{u}) \\
&= \frac{1}{6} \vec{u} - \frac{1}{3} \vec{v}
\end{aligned}$$

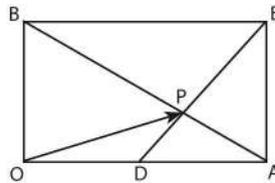
9. Diketahui persegi panjang OACB dan D titik tengah OA, CD memotong diagonal AB di P. Jika $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ dan $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, maka \overrightarrow{OP} dapat dinyatakan sebagai

- | | |
|--|--|
| A. $\frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ | D. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ |
| B. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$ | E. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$ |
| C. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$ | |

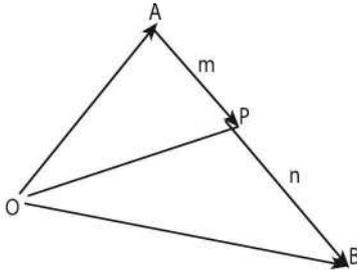
Jawaban: C

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} &= \vec{a} \\
\overrightarrow{OB} &= \vec{b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BP} \\
&= \overrightarrow{OB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{BA} \\
&= \vec{b} + \frac{2}{3} (\vec{a} - \vec{b}) \\
&= \frac{2}{3} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}
\end{aligned}$$



C. PEMBAGIAN RUAS GARIS DENGAN VEKTOR



Jika \vec{a} adalah vektor posisi titik A, \vec{b} vektor posisi titik B, \vec{p} vektor posisi dari titik P yang membagi garis AB dengan perbandingan

$$\overline{AP}:\overline{PB} = m:n, \text{ maka } \vec{p} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$$

Catatan:

- Jika titik P pada ruas garis AB, maka m atau n positif.
- Jika titik P ada di perpanjangan AB, maka salah satu m atau n negatif.

10. Ditentukan titik-titik P(-1,5,2) dan Q(5,-4,17). Jika T pada ruas garis PQ dan $\frac{PT}{TQ} = 2$, maka vektor posisi titik T adalah

- | | |
|----------------|----------------|
| A. (3, -1, 11) | D. (3, 1, 12) |
| B. (2, -1, 12) | E. (3, -1, 12) |
| C. (2, 0, 11) | |

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \overline{PT}:\overline{TQ} = 2:1$$

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \frac{2\vec{q} + \vec{p}}{2+1} \\ &= \frac{1}{3}(2(5, -4, 17) + (-1, 5, 2)) \\ &= (3, -1, 12) \end{aligned}$$

11. Diketahui vektor $\overline{OA}=(1,2)$ dan vektor $\overline{OB}=(2,1)$. Jika titik P terletak pada AB sehingga $AP:PB=1:2$, maka panjang vektor \overline{OP} sama dengan

A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{41}$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

E. $\frac{3}{2}\sqrt{41}$

C. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

Jawaban: D

$\Leftrightarrow AP:PB = 1:2$

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \frac{\vec{b} + 2\vec{a}}{3} \\ &= \frac{1}{3}\{(2,1) + 2(1,2)\} \\ &= \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |\vec{p}| &= \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{41}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{41} \end{aligned}$$

D. PERRKALIAN VEKTOR

a. Perkalian Vektor dengan Skalar

- Vektor $k\vec{a}$ adalah vektor yang diperoleh dengan mengalikan setiap komponen \vec{a} dengan skalar k.
- Vektor \vec{a} dan vektor \vec{b} kolinier (segaris/searah/berimpit) jika memenuhi:

$$\begin{aligned} \vec{b} = k\vec{a} \text{ dengan: } k > 0 &\rightarrow \vec{a} \text{ sejajar } \vec{b} \\ k < 0 &\rightarrow \vec{a} \text{ berlawanan } \vec{b} \end{aligned}$$

b. Perkalian Titik Dua Vektor

Bila $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ dan $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ dan $\theta =$ sudut antara vektor \vec{a} dan \vec{b} , maka:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$

Dari rumus di atas, dapat ditentukan sudut antara vektor \vec{a} dan vektor \vec{b} sebagai berikut:

$$\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)} \cdot \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)}}$$

c. Perkalian Silang Dua Vektor

Bila $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ dan $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ untuk $|\vec{a}| \neq 0$, $|\vec{b}| \neq 0$ dan $\theta =$ sudut antara vektor \vec{a} dan \vec{b} , maka:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 4

12. Agar kedua vektor $\vec{a} = (x, 4, 7)$ dan $\vec{b} = (6, y, 14)$ segaris, haruslah nilai sama dengan

- A. -5
- B. -2
- C. 3
- D. 4
- E. 6

Jawaban: A

\Leftrightarrow Syarat segaris $\vec{a} = k\vec{b}$

$$\begin{pmatrix} x \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 6 \\ y \\ 14 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots(1) \\ \dots(2) \\ \dots(3) \end{array}$$

Dari persamaan (3) diperoleh nilai $k = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Untuk } k = \frac{1}{2} \rightarrow & \quad (1) \rightarrow x = 3 \\ & \quad (2) \rightarrow y = 8 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } x - y = -5$$

13. Diketahui $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j}$, dan $\vec{r} = 7\hat{i} - 8\hat{j}$. Jika $\vec{r} = k\vec{a} + m\vec{b}$ maka $k + m = \dots$

- A. 3
B. 2
C. 1
D. -1
E. -2

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \vec{r} = k\vec{a} + m\vec{b}$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3k \\ -2k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -m \\ 4m \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \dots(1) \\ \dots(2) \end{array}$$

$$\text{pers (1)} \times 4 \rightarrow 28 = 12k - 4m$$

$$\text{pers (2)} \rightarrow -8 = -2k + 4m$$

$$20 = 10k \rightarrow k = 2$$

$$m = -1$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi } k + m = 1$$

14. Jika \vec{u} dan \vec{v} adalah vektor satuan yang membentuk sudut 30° , maka $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \dots$

- A. $\frac{3}{2}$
B. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$
E. $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} \\ = (\vec{u} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 30^\circ + |\vec{v}| \cdot |\vec{v}| \cos 0^\circ \\
 &= (1)(1) \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) + (1)(1)(1) \\
 &= \frac{1}{2} \sqrt{3} + 1
 \end{aligned}$$

15. Diketahui vektor $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} - 5\hat{k}$, dan $\vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$.
Jika vektor $(\vec{a} + \vec{b})$ tegak lurus \vec{c} maka nilai $2t = \dots$

- | | |
|----------------------------|------------------|
| A. -2 atau $\frac{4}{3}$ | D. 3 atau 2 |
| B. 2 atau $\frac{4}{3}$ | E. -3 atau 2 |
| C. 2 atau $-\frac{4}{3}$ | |

Jawaban: A

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} &= (2t, -1, 3) + (-t, 2, -5) \\
 &= t\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \perp \vec{c}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0$$

$$(t)(3t) + (1)(t) + (-2)(1) = 0$$

$$3t^2 + t - 2 = 0$$

$$(3t - 2)(t + 1) = 0$$

- $t = -1 \rightarrow 2t = -2$

- $t = \frac{2}{3} \rightarrow 2t = \frac{4}{3}$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, nilai } 2t = -2 \text{ atau } \frac{4}{3}$$

16. Diketahui titik $A(3, 2, -3)$, $B(0, 4, -2)$, dan $C(5, 3, -6)$. Sudut antara vektor \overline{AB} dengan \overline{AC} adalah

- | | |
|---------------|----------------|
| A. 30° | D. 120° |
| B. 45° | E. 135° |
| C. 60° | |

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= (0, 4, -2) - (3, 2, -3) \\ &= (-3, 2, 1) \\ \overline{AC} &= \overline{OC} - \overline{OA} \\ &= (5, 3, -6) - (3, 2, -3) \\ &= (2, 1, -3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos \theta &= \frac{(\overline{AB}) \cdot (\overline{AC})}{|\overline{AB}| |\overline{AC}|} \\ &= \frac{(-3)(2) + (2)(1) + (1)(-3)}{\sqrt{(-3)^2 + (2)^2 + (1)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-3)^2}} \\ &= \frac{-7}{14} = -\frac{1}{2} \rightarrow \theta = 120^\circ \end{aligned}$$

17. Jika $\vec{a} = (2, k)$ dan $\vec{b} = (3, 5)$ dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$, maka konstanta positif k adalah

- A. $\frac{1}{2}$ D. 4
 B. $\frac{1}{4}$ E. 8
 C. 2

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos 45^\circ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} &= \frac{6 + 5k}{\sqrt{4 + k^2} \cdot \sqrt{9 + 25}} \rightarrow \text{kuadratkan} \\ \frac{1}{2} &= \frac{36 + 60k + 25k^2}{(4 + k^2)(37)} \end{aligned}$$

$$68 + 17k^2 = 36 + 60k + 25k^2$$

$$0 = 8k^2 + 60k - 32 \rightarrow \text{dibagi 4}$$

$$0 = 2k^2 + 15k - 8$$

$$0 = (2k - 1)(k + 8)$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } k \text{ yang positif} = \frac{1}{2}$$

18. Diketahui vektor satuan $\vec{u} = 0,8\hat{i} + a\hat{j}$. Jika vektor $\vec{v} = b\hat{i} + \hat{j}$ tegak lurus \vec{u} , maka $a \cdot b = \dots$

A. $-\frac{18}{20}$

D. $-\frac{9}{20}$

B. $-\frac{15}{20}$

E. $-\frac{8}{20}$

C. $-\frac{12}{20}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{Besarnya vektor satuan } \vec{u} = 1$$

$$\sqrt{(0,8)^2 + a^2} = 1$$

$$0,64 + a^2 = 1$$

$$a^2 = 1 - 0,64 = 0,36$$

$$a = \sqrt{0,36} = 0,6$$

$$= \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$(0,8)(b) + (a)(1) = 0$$

$$0,8b + (0,6) = 0$$

$$b = \frac{-0,6}{0,8} = -\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow a \cdot b = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{9}{20}$$

19. Diketahui vektor $\vec{u} = (a^3, 3, 4a)$ dan $\vec{v} = (2, -7a^2, 9)$ dengan $0 < a < 8$.

Nilai maksimum $\vec{u} \cdot \vec{v}$ adalah

- A. 108
B. 17
C. 15
D. 6
E. 1

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \vec{u} = (a^3, 3, 4a) \text{ dan } \vec{v} = (2, -7a^2, 9)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2)(a^3) + (3)(-7a^2) + (4a)(9)$$

$$F(a) = 2a^3 - 21a^2 + 36a$$

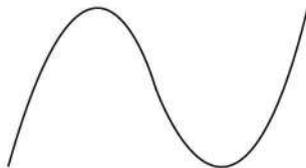
Syarat stasioner:

$$F'(a) = 0$$

$$6a^2 - 42a + 36 = 0 \rightarrow \text{dibagi } (6)$$

$$a^2 - 7a + 6 = 0$$

$$(a-1)(a-6) = 0$$



\Leftrightarrow Dari sketsa kurva, nilai maksimum kurva

$$F(1) = 2(1)^3 - 21(1)^2 + 36(1) = 17$$

20. Diketahui $A = (4, 9, 1)$, $B = (6, 3, -2)$, dan $C = (-2, 6, 3)$ adalah titik-titik sudut suatu segitiga. Luas segitiga ABC itu sama dengan

- A. 36
B. 30
C. $\frac{49}{2}$
D. 18
E. $\frac{13}{2}$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \text{ Misal: vektor } \vec{p} &= \overline{AB} \\ &= (6, 3, -2) - (4, 9, 1) \\ &= (2, -6, -3) \\ \text{vektor } \vec{q} &= \overline{AC} \\ &= (-2, 6, 3) - (4, 9, 1) \\ &= (-6, -3, 2)\end{aligned}$$

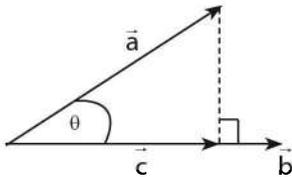
$$\begin{aligned}\vec{p} \times \vec{q} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -6 & -3 \\ -6 & -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ 2 & -6 \\ -6 & -3 \end{vmatrix} \\ &= -21\hat{i} + 14\hat{j} - 42\hat{k}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\vec{p} \times \vec{q}| &= \sqrt{(-21)^2 + (14)^2 + (-42)^2} \\ &= \sqrt{2401} = 49\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \text{ Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} |\vec{p} \times \vec{q}| = \frac{49}{2}$$

E. PROYEKSI VEKTOR

Jika vektor \vec{c} adalah vektor proyeksi \vec{a} pada \vec{b} , maka:



- **Proyeksi skalar** ortogonal vektor \vec{a} pada \vec{b} vektor adalah:

$$|\vec{c}| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}$$

- **Proyeksi vektor** ortogonal vektor \vec{a} pada \vec{b} vektor adalah:

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \cdot \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} \text{ atau } \vec{c} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 5

21. Diketahui vektor $\vec{a} = 9\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$ dan $\vec{b} = 2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Proyeksi ortogonal vektor \vec{a} pada \vec{b} adalah
- A. $-4\hat{i} - 4\hat{j} - 2\hat{k}$ D. $8\hat{i} + 8\hat{j} + 4\hat{k}$
 B. $2\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}$ E. $18\hat{i} - 4\hat{j} - 8\hat{k}$
 C. $4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$

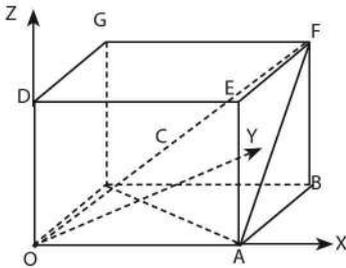
Jawaban: C

⇔ Proyeksi ortogonal vektor \vec{a} pada \vec{b}

$$\begin{aligned} & \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b} \\ &= \frac{(9, -2, 4) \cdot (2, 2, 1)}{(\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2})^2} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \\ &= \frac{18 - 4 + 4}{9} \cdot (2\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}) \\ &= 4\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k} \end{aligned}$$

22. Diketahui kubus OABCDEFGH. Jika $\vec{OA} = (1, 0, 0)$, $\vec{OC} = (0, 1, 0)$, dan $\vec{OD} = (0, 0, 1)$. Vektor proyeksi \vec{AF} ke \vec{OF} adalah
- A. $\frac{1}{2}(1, 1, 1)$ D. $\frac{2}{3}(1, 1, 1)$
 B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$ E. $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
 C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}(1, 1, 1)$

Jawaban: D



$$\Leftrightarrow \overline{AF} = (0,1,1) \text{ dan } \overline{OF} = (1,1,1).$$

\Leftrightarrow Vektor proyeksi \overline{AF} ke \overline{OF} adalah:

$$\begin{aligned} &= \frac{\overline{AF} \cdot \overline{OF}}{|\overline{OF}|^2} \cdot \overline{OF} \\ &= \frac{(0)(1) + (1)(1) + (1)(1)}{(\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2})^2} (1,1,1) \\ &= \frac{2}{3} (1,1,1) \end{aligned}$$

23. Diketahui $A(-3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, dan $C(0, 0, 2)$. Panjang vektor proyeksi \overline{AC} ke vektor \overline{AB} adalah

A. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

D. $\sqrt{2}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \overline{AC} = (0,0,2) - (-3,0,0) = (3,0,2)$$

$$\overline{AB} = (0,3,0) - (-3,0,0) = (3,3,0)$$

⇔ Panjang vektor proyeksi \overline{AC} ke vektor \overline{AB} adalah

$$\frac{(\overline{AC}) \cdot (\overline{AB})}{|\overline{AB}|} = \frac{(3)(3) + (0)(3) + (2)(0)}{\sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{18}} = \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

24. Bila panjang proyeksi vektor $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$ pada vektor $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j}$ dengan $(x, y) > 0$ adalah 1, maka nilai $4x - 3y + 1 = \dots$

- A. 1
 B. -1
 C. 0
 D. 2
 E. 3

Jawaban: A

⇔ Diketahui $\vec{b} = (1, 2)$ dan $\vec{a} = (x, y)$

⇔ Panjang proyeksi \vec{b} pada \vec{a} adalah

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|} = 1$$

$$\frac{(1)(x) - (2)(y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 1 \rightarrow \text{dikali silang}$$

$$(1)(x) - (2)(y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 - 4xy + 4y^2 = x^2 + y^2$$

$$-4xy + 3y^2 = 0 \rightarrow \text{dibagi } (-y)$$

$$4x - 3y = 0$$

⇔ $(4x - 3y) + 1 = (0) + 1 = 1$

LATIHAN SOAL 14

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

- Diketahui vektor-vektor $\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 6\hat{j} + 5\hat{k}$, dan $\vec{c} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 6\hat{k}$. Vektor $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} = \dots$
 - $\hat{i} - 7\hat{j} - 15\hat{k}$
 - $\hat{i} + 20\hat{j} - 17\hat{k}$
 - $\hat{i} - 7\hat{j} - 17\hat{k}$
 - $-6\hat{i} + 20\hat{j} - 17\hat{k}$
 - $-6\hat{i} - 7\hat{j} - 15\hat{k}$
- Jika $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, dan $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}$, maka panjang vektor $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$ adalah
 - $\sqrt{5}$
 - $2\sqrt{13}$
 - 17
 - $3\sqrt{13}$
 - $2\sqrt{11}$
- Diketahui $\vec{a} = -7\hat{i} + 8\hat{j}$ dan $P(1, -2)$. Jika $|\overline{PQ}| = |\vec{a}|$ dan \overline{PQ} berlawanan arah dengan \vec{a} , maka koordinat titik Q adalah
 - (6, 10)
 - (6, -10)
 - (6, -6)
 - (8, 10)
 - (8, -10)

4. Vektor $\overline{PQ} = (2, 0, 1)$ dan vektor $\overline{PR} = (1, 1, 2)$. Jika $\overline{PS} = \frac{1}{2}\overline{PQ}$ maka vektor $\overline{RS} = \dots$

A. $\left(0, -1, -\frac{3}{2}\right)$

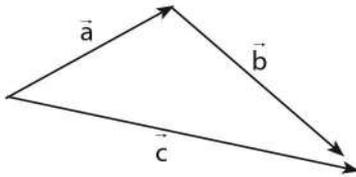
D. $\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)$

B. $\left(-1, 0, \frac{3}{2}\right)$

E. $(1, -1, 1)$

C. $\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right)$

5. Gambar di bawah menunjukkan bahwa $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \dots$



A. \vec{c}

D. $2\vec{c}$

B. $2\vec{a}$

E. \vec{c}

C. $2\vec{b}$

6. Pada persegi panjang OACB, D adalah titik tengah OA dan P titik potong CD dengan diagonal AB. Jika $\vec{a} = \overline{OA}$ dan $\vec{b} = \overline{OB}$, maka $\overline{CP} = \dots$

A. $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

D. $-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

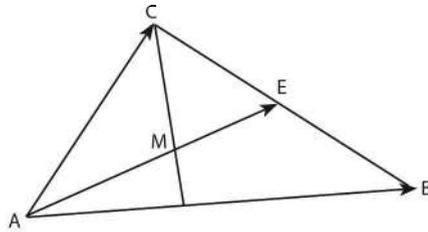
B. $\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

E. $-\frac{2}{3}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$

C. $-\frac{1}{3}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b}$

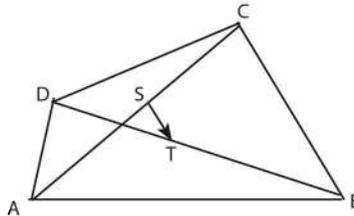
7. Pada segitiga ABC, E adalah titik tengah BC dan M adalah titik berat segitiga tersebut. Jika $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ dan $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, maka ruas garis berarah \overrightarrow{ME} dapat dinyatakan dalam \vec{u} dan \vec{v} sebagai

- A. $\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v}$
 B. $-\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{6}\vec{v}$
 C. $\frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{6}\vec{v}$
 D. $\frac{1}{6}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$
 E. $-\frac{1}{6}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$



8. Pada segi empat sembarang ABCD, S dan T masing-masing adalah titik tengah AC dan BD. Jika $\vec{u} = \overrightarrow{ST}$, maka $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ dapat dinyatakan dalam \vec{u} sebagai

- A. $\frac{1}{4}\vec{u}$
 B. $\frac{1}{2}\vec{u}$
 C. \vec{u}
 D. $2\vec{u}$
 E. $4\vec{u}$



9. Diketahui persegi panjang ABCD dan P, Q, R, S berturut-turut merupakan titik tengah AB, BC, CD, dan DA. Jika $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ dan $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, maka $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PS} = \dots$

- A. $3\vec{a} - 2\vec{b}$
 B. $3\vec{b} - 2\vec{a}$
 C. $3(\vec{b} - \vec{a})$
 D. $3(\vec{a} - \vec{b})$
 E. $3(\vec{a} + \vec{b})$

10. Diketahui bidang empat ABCD. $\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$. Jika titik Q pada AB dengan $AQ : QB = 1 : 2$, dan titik R pada BC dengan $BR : RC = 1 : 2$, maka $\overrightarrow{QR} = \dots$

A. $\frac{-\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

D. $\frac{-2\vec{a} - \vec{b} - \vec{c}}{3}$

B. $\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

E. $\frac{-2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}{3}$

C. $\frac{-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

SOAL LATIHAN - 2

11. Jika vektor tak nol \vec{a} dan \vec{b} memenuhi $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}|$, maka vektor \vec{a} dan \vec{b}

A. membentuk sudut 90°

D. searah

B. membentuk sudut 60°

E. berlawanan arah

C. membentuk sudut 45°

12. Jika $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 6$, dan $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$, maka $|\vec{a} - \vec{b}| = \dots$

A. 4

D. $2\sqrt{17}$

B. 8

E. $2\sqrt{19}$

C. 14

13. Diketahui vektor $\vec{a} + \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$ dan $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{14}$. Nilai $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dots$

A. 4

D. $\frac{1}{2}$

B. 2

E. 0

C. 1

14. Jika $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$ dan $\vec{b} = -4\hat{i} + 2\hat{j} - 6\hat{k}$,

(1) $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{14}$

(2) $|\vec{a}| : |\vec{b}| = 1 : 2$

(3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -28$

(4) \vec{a} / \vec{b}

Pernyataan yang benar adalah

A. (1), (2), dan (3)

D. (4)

B. (1) dan (3)

E. (1), (2), (3), dan (4)

C. (2) dan (4)

SOAL LATIHAN - 3

15. Diketahui titik A(1, -2, -8) dan titik B(3, -4, 0). Titik P terletak pada perpanjangan AB sehingga $\vec{AP} = -3\vec{PB}$. Jika \vec{p} vektor posisi titik P, maka $\vec{p} = \dots$

A. $4\hat{i} - 5\hat{j} + 4\hat{k}$

D. $-3\hat{i} - \hat{j} - 12\hat{k}$

B. $4\hat{i} - 5\hat{j} - 4\hat{k}$

E. $-\hat{i} - 5\hat{j} - 2\hat{k}$

C. $-\hat{j} - 12\hat{k}$

16. Diketahui titik A(4, 9, -6) dan B(-4, -3, 2). Titik P membagi AB di dalam dengan perbandingan 1 : 3. Panjang $\vec{PB} = \dots$

A. $\sqrt{15}$

D. $\sqrt{121}$

B. $\sqrt{81}$

E. $\sqrt{153}$

C. $\sqrt{90}$

SOAL LATIHAN - 3

17. Jika titik P $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$, Q(1,0,0), dan R(2, 5, a) terletak pada satu garis lurus, maka a =

A. 0

D. 2

B. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{5}{2}$

C. 1

23. Diketahui $P=(a, 0, 3)$, $Q=(0, 6, 5)$, dan $R=(2, 7, c)$. Agar vektor \overline{PQ} tegak lurus pada \overline{QR} , haruslah nilai $a - c$ sama dengan
- A. -3
B. -2
C. 2
D. 3
E. 5
24. Jika \vec{u} dan \vec{v} adalah vektor satuan membentuk sudut 60° , maka $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} = \dots$
- A. $\frac{1}{2}\sqrt{3} - 1$
B. $\frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$
C. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{1}{2}\sqrt{2} + 1$
E. $\frac{1}{\sqrt{3}} + 1a$
25. Jika vektor \vec{a} dan vektor \vec{b} membentuk sudut 60° , $|\vec{a}| = 4$ dan $|\vec{b}| = 3$ maka $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \dots$
- A. 2
B. 4
C. 6
D. 8
E. 10
26. Diketahui vektor \vec{u} dan vektor \vec{v} membentuk sudut θ . Jika panjang proyeksi \vec{u} pada \vec{v} sama dengan dua kali panjang \vec{v} , maka perbandingan panjang \vec{u} terhadap panjang \vec{v} adalah
- A. $1:2 \cos \theta$
B. $2: \cos \theta$
C. $2 \cos \theta:1$
D. $1: \cos \theta$
E. $\cos \theta:2$
27. Diketahui vektor $\vec{u} = -p^2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$ dan $\vec{v} = \hat{i} + p\hat{j} - 5\hat{k}$ dengan $-2 < p < 2$. Nilai maksimum $\vec{u} \cdot \vec{v}$ adalah
- A. 8
B. 7
C. 5
D. 4
E. 3

28. Diketahui vektor-vektor: $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} - 3\hat{k}$

$$\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{c} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$$

$$\vec{d} = \hat{i} + 2\hat{k}$$

Pasangan vektor di atas yang saling tegak lurus adalah

A. \vec{a} dengan \vec{d}

D. \vec{a} dengan \vec{b}

B. \vec{c} dengan \vec{d}

E. \vec{a} dengan \vec{c}

C. \vec{b} dengan \vec{d}

29. Diketahui vektor-vektor $\vec{a} = (1, 3, 3)$, $\vec{b} = (3, 2, 1)$, dan $\vec{c} = (1, -5, 0)$.

Sudut antara vektor $(\vec{a} - \vec{b})$ dan $(\vec{a} + \vec{c})$ adalah

A. 30°

D. 90°

B. 45°

E. 120°

C. 60°

30. $\vec{a} = 3x\hat{i} + x\hat{j} - 4\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 4\hat{j} + 5\hat{k}$, dan $\vec{c} = -3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$. Jika \vec{a} tegak lurus pada \vec{b} , maka sama dengan

A. $-33\hat{i} - 8\hat{j} - 5\hat{k}$

D. $-33\hat{i} - 12\hat{j} - 5\hat{k}$

B. $-27\hat{i} - 8\hat{j} - 5\hat{k}$

E. $-33\hat{i} + 8\hat{j} - 5\hat{k}$

C. $-27\hat{i} - 12\hat{j} - 5\hat{k}$

31. Jika $\vec{OA} = \hat{i} + \hat{k}$, $\vec{OB} = \hat{j} + \hat{k}$, dan $\vec{OC} = c\hat{j} + 4\hat{k}$, dan $\angle ABC = 60^\circ$, maka $c = \dots$

A. 3

D. -1

B. 2

E. -2

C. 1

32. Diketahui vektor-vektor $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + 5\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 2\hat{j} + (3x + 2)\hat{k}$ dan $\vec{c} = -2y\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k}$. Jika \vec{a} dan \vec{c} masing-masing tegak lurus pada \vec{b} , maka $-\frac{1}{4}(7\vec{a} - \vec{c}) = \dots$

A. $-2\hat{i} - 21\hat{j} + 35\hat{k}$

D. $-2\hat{i} - 5\hat{j} - 7\hat{k}$

B. $-8\hat{i} - 20\hat{j} - 28\hat{k}$

E. $2\hat{i} + \frac{11}{2}\hat{j} + 7\hat{k}$

C. $2\hat{i} + 5\hat{j} - 7\hat{k}$

33. Diketahui vektor-vektor $\vec{p} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$ dan $\vec{q} = -3\hat{i} - 5\hat{j} + 2\hat{k}$ mengapit sudut α , $\tan \alpha = \dots$
- A. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ D. 1
B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ E. $\sqrt{3}$
C. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
34. Diketahui \vec{u} dan \vec{v} vektor tak nol sebarang $\vec{w} = |\vec{v}|\vec{u} + |\vec{u}|\vec{v}$. Jika $\theta = \angle(\vec{u}, \vec{w})$ dan $\phi = \angle(\vec{v}, \vec{w})$, maka
- A. $\phi - \theta = 90^\circ$ D. $\theta - \phi = 90^\circ$
B. $\theta + \phi = 90^\circ$ E. $\theta + \phi = 180^\circ$
C. $\theta = \phi$
35. Jika sudut antara vektor $\vec{a} = \hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + p\hat{k}$ dan vektor $\vec{b} = \hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} + p\hat{k}$ adalah 60° , maka $p = \dots$
- A. $-\frac{1}{2}$ atau $\frac{1}{2}$ D. $-\sqrt{5}$ atau $\sqrt{5}$
B. -1 atau 1 E. $-\frac{1}{2}\sqrt{5}$ atau $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
C. $-\sqrt{2}$ atau $\sqrt{2}$
36. Diketahui $A(4, 0, 0)$, $B(0, -4, 0)$, dan $C(0, 0, 5)$. Panjang vektor proyeksi \overline{AC} ke vektor \overline{AB} adalah
- A. $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ E. $2\sqrt{2}$
C. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
37. Sudut antara vektor $\vec{a} = x\hat{i} + (2x+1)\hat{j} - x\sqrt{3}\hat{k}$ dan \vec{b} adalah 60° . Jika panjang proyeksi \vec{a} ke \vec{b} sama dengan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, maka $x = \dots$
- A. 4 atau $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{2}$ atau -1
B. 1 atau 4 E. $-\frac{1}{2}$ atau 1
C. 1 atau 2

38. Jika $\vec{a} = (x+1)\hat{i} + x\hat{j}$, $\vec{b} = 2x\hat{i} + (3x+1)\hat{j}$, dan \vec{p} proyeksi \vec{a} ke \vec{b} , maka $|\vec{p}| = 2|\vec{a}|$ untuk

- A. $x < -1$
- B. $-2 \leq x \leq 1$
- C. $-1 \leq x \leq 2$
- D. $x > 2$
- E. $x > 1$

39. Diketahui titik-titik $P(2, -3, 0)$, $Q(3, -1, 2)$, $R(4, -2, -1)$. Panjang proyeksi vektor \vec{PQ} pada vektor \vec{PR} adalah

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{3}$
- C. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$
- D. $\frac{2}{3}$
- E. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

40. Sudut antara vektor $\vec{a} = x\hat{i} + (2x+1)\hat{j} - x\sqrt{3}\hat{k}$ dan \vec{b} adalah 60° . Jika panjang proyeksi \vec{a} ke \vec{b} sama dengan $\frac{1}{2}\sqrt{5}$, maka $x = \dots$

- A. 4 atau $-\frac{1}{2}$
- B. 1 atau 4
- C. 1 atau 2
- D. $\frac{1}{2}$ atau -1
- E. $-\frac{1}{2}$ atau 1

41. Vektor $\vec{u} = -3\hat{i} + 4\hat{j} + x\hat{k}$ dan $\vec{v} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 6\hat{k}$. Jika panjang proyeksi \vec{u} pada \vec{v} adalah 6, maka $x = \dots$

- A. 8
- B. 10
- C. 12
- D. -4
- E. -6

42. Diberikan vektor-vektor berikut.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} \\ p \end{pmatrix}, \text{ dan } \vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ q \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Jika panjang proyeksi vektor \vec{b} pada vektor \vec{a} adalah 1, dan vektor \vec{b} tegak lurus dengan vektor \vec{c} , maka nilai $p + q$ adalah

- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3

43. Diketahui \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} vektor pada bidang $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, $\hat{b} = \hat{i} - 2\hat{j}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, dan α sudut yang dibentuk oleh \vec{a} dan \vec{c} . Jika luas segitiga yang dibentuk oleh titik ujung vektor-vektor \vec{a} , \vec{b} , dan \vec{c} adalah 5 satuan luas, maka $\sin \alpha = \dots$

- A. $-\frac{1}{5}\sqrt{5}$
B. $-\frac{2}{5}\sqrt{5}$
C. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
D. $\frac{2}{5}\sqrt{5}$
E. $\frac{1}{2}$

44. Diketahui $\vec{a} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ dan vektor $\vec{b} = 2\hat{i} - 6\hat{j} + 4\hat{k}$. Proyeksi vektor ortogonal \vec{a} pada \vec{b} adalah

- A. $8\hat{i} - 4\hat{j} + 4\hat{k}$
B. $6\hat{i} - 8\hat{j} + 6\hat{k}$
C. $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$
D. $\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}$
E. $\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

45. Diketahui kubus satuan ABCD EFGH. Misalkan vektor-vektor $\overline{AB} = \vec{i} = (1, 0, 0)$, $\overline{AD} = \vec{j} = (0, 1, 0)$, dan $\overline{AE} = \vec{k} = (0, 0, 1)$. Titik P adalah titik pusat sisi BCGF. Vektor proyeksi \overline{FP} ke vektor \overline{AC} adalah

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
C. $\frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 1, 1)$
D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}(1, 1, 0)$
E. $\frac{1}{4}(1, 1, 0)$



TRANSFORMASI GEOMETRI

15

A. TRANSFORMASI GEOMETRI DAN JENISNYA

a. Transformasi Geometri

- **Transformasi** adalah suatu proses pemetaan sebuah objek ke objek lain pada bidang yang sama.
- Objek tersebut bisa berupa titik, garis, dan bidang.
- Jika sebuah objek P ditransformasikan oleh matriks T , akan menghasilkan objek lain P' .
- Beberapa jenis transformasi yang sudah dikenal adalah: translasi (pergeseran), refleksi (pencerminan), rotasi (perputaran), dan dilatasi (perubahan ukuran).

b. Macam-macam Transformasi Geometri

1. Transformasi Translasi (pergeseran)

Proses umum untuk mencari hasil transformasi translasi dengan

matriks $T = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut.

- Untuk pusat transformasi di $(0,0)$ adalah $P' = T + P \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Untuk pusat transformasi di (a,b) adalah $P' = T + P \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = T + \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

2. Transformasi Refleksi, Rotasi, Dilatasi, dan jenis transformasi lainnya. Proses umum untuk mencari hasil tranformasi dengan matriks

$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ adalah sebagai berikut.

- Untuk pusat transformasi di $(0,0)$ adalah $P' = T \cdot P \rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- Untuk pusat transformasi di (a,b) adalah $P' = T \cdot P \rightarrow$

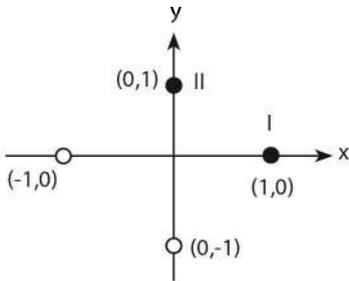
$$\begin{pmatrix} x' - a \\ y' - b \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x - a \\ y - b \end{pmatrix}$$

3. Beberapa jenis Transformasi Geometri Khusus.

No	Jenis Transformasi	Simbol	Matriks Transformasi
1	Identitas	I	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	Pencerminan terhadap sumbu x	M_x	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
3	Pencerminan terhadap sumbu y	M_y	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	Pencerminan terhadap titik asal O atau rotasi setengah putaran	H	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
5	Pencerminan terhadap garis $y = x$	$M_{y=x}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
6	Pencerminan terhadap garis $y = -x$	$M_{y=-x}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

7	Pemutaran -90° mengelilingi O	R_{-90°	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
8	Pemutaran $+90^\circ$ mengelilingi O	R_{+90°	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
9	Dilatasi dengan faktor dilatasi k	$[0,k]$	$\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
10	Rotasi sebesar θ mengelilingi	R_θ	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

Cara menghafal sebagian matriks transformasi khusus.



$$\text{matriks transformasinya} = \begin{pmatrix} x'_I & x'_{II} \\ y'_I & y'_{II} \end{pmatrix}$$

$(x'_I \ y'_I) = \text{bayangan titik I}$

$(x'_{II} \ y'_{II}) = \text{bayangan titik II}$

d. Bayangan hasil refleksi terhadap garis yang sejajar dengan sumbu-sumbu koordinat.

- Pencerminan terhadap **garis $x = a$** \rightarrow

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - x \\ y \end{pmatrix}$$

- Pencermian terhadap **garis $y = a$** \rightarrow

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2a - y \end{pmatrix}$$

- Pencermian terhadap **garis $x = a$** dilanjutkan pencermian terhadap garis **$x = b$**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2(b-a) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(b-a) + x \\ y \end{pmatrix}$$

- Pencermian terhadap **garis $y = a$** dilanjutkan pencermian terhadap garis **$y = b$**

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2(b-a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2(b-a) + y \end{pmatrix}$$

- Pencermian terhadap **titik (a,b)** \rightarrow

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \end{pmatrix}$$

5. Bentuk Khusus

- Luas segitiga ABC dengan titik A(x_1, y_1), B (x_2, y_2) dan C (x_3, y_3)=

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.$$

- Luas benda hasil transformasi = $|\det T| \cdot$ Luas benda asal

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Bayangan kurva $y = x^2 - 3$ jika dicerminkan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan dilatasi pusat O dan faktor skala 2 adalah

- A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ D. $y = 6 - \frac{1}{2}x^2$
 B. $y = \frac{1}{2}x^2 - 6$ E. $y = 3 - \frac{1}{2}x^2$
 C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow T_1 = \text{pencerminan thp sb-x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \text{dilatasi dengan faktor } 2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P' = T \cdot P$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}$$

Dari persamaan di atas diperoleh $x = \frac{1}{2} x'$ dan $y = -\frac{1}{2} y'$

\Leftrightarrow Bayangannya adalah:

$$P': -\frac{1}{2} y' = \left(\frac{1}{2} x'\right)^2 - 3 \rightarrow \text{dikali } (-2)$$

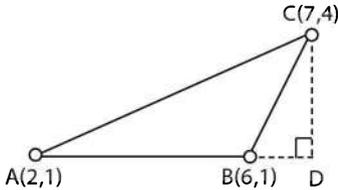
$$y = 6 - \frac{1}{2} x'^2$$

2. Segitiga ABC dengan $A(2,1)$, $B(6,1)$ dan $C(7,4)$ ditransformasikan dengan matriks transformasi $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Luas bangun hasil transformasi segitiga ABC adalah

- A. 56 satuan luas D. 24 satuan luas
 B. 28 satuan luas E. 18 satuan luas
 C. 36 satuan luas

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det T = 3$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Luas } \triangle ABC &= \text{Luas } \triangle ADC - \text{Luas } \triangle BDC \\ &= \frac{1}{2}(AD)(DC) - \frac{1}{2}(BD)(DC) \\ &= \frac{1}{2}(5)(3) - \frac{1}{2}(1)(3) = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Luas } \triangle \text{ hasil transformasi} &= |\det T| \cdot \text{Luas } \triangle \text{ asal} \\ &= (3)(6) = 18 \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

3. Jika matriks $\begin{pmatrix} a & -3 \\ 4 & b \end{pmatrix}$ mentransformasikan titik (5, 1) ke titik (7, 12) dan inversnya mentransformasikan titik P ke titik (1, 0), maka koordinat titik P adalah

- A. (2, -4) D. (-2, -4)
B. (2, 4) E. (1, -3)
C. (-2, 4)

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow A' = T \cdot A &\rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -3 \\ -4 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\begin{pmatrix} 7 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5a-3 \\ -20+b \end{pmatrix} \\ &7 = 5a - 3 \rightarrow a = 2 \\ &-12 = -20 + b \rightarrow b = 8 \end{aligned}$$

sehingga matriks $T = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow P' = T^{-1} \cdot P \rightarrow P = T \cdot P'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

4. Proyeksi titik $(2, 3)$ pada garis $y = x$ adalah

A. $\left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$

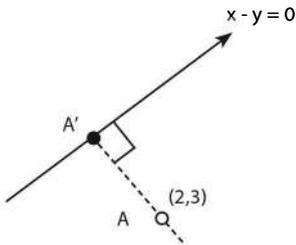
D. $\left(\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right)$

B. $\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$

E. $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$

C. $\left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$

Jawaban: A



\Leftrightarrow Proyeksi titik $A(2,3)$ pada garis $x - y = 0$ adalah A'

SOLUSI SMART!

\Leftrightarrow Persamaan garis $A'A$ tegak lurus

$x - y = 0$ dan melalui titik $(2,3)$ adalah:

$$x + y = 2 + 3 \quad \rightarrow \quad x + y = 5$$

\Leftrightarrow substitusikan $y = x$ ke persamaan $x + y = 5$

$$x + x = 5 \rightarrow x = \frac{5}{2} \text{ dan } y = \frac{5}{2}$$

\Leftrightarrow Perpotongan garis $y = x$ dan $x + y = 5$ adalah titik $A' \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

5. Parabola $y = x^2 - 6x + 8$ digeser ke kanan sejauh 2 satuan searah dengan sumbu x dan digeser ke bawah sejauh 3 satuan. Jika parabol hasil pergeseran ini memotong sumbu x di x_1 dan x_2 , maka $x_1 + x_2 = \dots$
- A. 8
B. 9
C. 10
- D. 11
E. 12

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow P: y = x^2 - 6x + 8$$

$$\Leftrightarrow \text{Matriks transformasinya} = T = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P' = T + P$$

$$P = P' - T$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = x' - 2 \\ y = y' + 3 \end{matrix}$$

\Leftrightarrow Banyangan hasil pergeseran adalah:

$$P': (y' + 3) = (x' - 2)^2 - 6(x' - 2) + 8$$

$$y' + 3 = x'^2 - 4x' + 4 - 6x' + 12 + 8$$

$$y' = x'^2 - 10x' + 21$$

$$y = x^2 - 10x + 21$$

\Leftrightarrow Syarat memotong sumbu x adalah $y = 0$

$$0 = x^2 - 10x + 21 \rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 10$$

SOLUSI SMART!

\Leftrightarrow Jika parabola $y = x^2 - 6x + 8$ digeser ke kanan sejauh 2 satuan ke kanan dan digeser ke bawah sejauh 3 satuan akan menjadi:

$$(y + 3) = (x - 2)^2 - 6(x - 2) + 8$$

$$(y + 3) = x^2 - 4x + 4 - 6x + 12 + 8$$

$$y = x^2 - 10x + 21$$

\Leftrightarrow Syarat memotong sumbu x adalah $y = 0$

$$0 = x^2 - 10x + 21 \rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = 10$$

6. Jika $M = A^3$ dan $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$, maka $M \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \dots$

A. $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Jawaban: B

• Matriks Rotasi $\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} = \text{Rotasi } 30^\circ$$

$$M = A^3 = 3 \times \text{Rotasi } 30^\circ$$

$$\text{Rotasi } 90^\circ = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

7. Bayangan parabola $x^2 + 2y - 1 = 0$ setelah dilatasi dengan faktor dilatasi 4 terhadap titik pusat dilatasi (2, 0) adalah

A. $x^2 + 2y - 1 = 0$

D. $x^2 + 12x - 8y + 20 = 0$

B. $x^2 - 2y - 1 = 0$

E. $x^2 + 12x + 8y - 20 = 0$

C. $x^2 + 12x + 8y + 20 = 0$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \text{Matriks } T = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' - p \\ y' - q \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x - p \\ y - q \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' - 2 \\ y' - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 8 \\ 4y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 6 \\ 4y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} x' + 6 \\ y' \end{pmatrix}$$

$$P' : \left\{ \frac{1}{4}(x' + 6) \right\}^2 + 2\left(\frac{1}{4}y'\right) - 1 = 0$$

$$: \frac{1}{16}(x^2 + 12x + 36) + \frac{1}{2}y - 1 = 0$$

→ dikali 16 di kedua ruasnya

- $x^2 + 12x + 8y + 20 = 0$

8. Ditentukan T_1 adalah refleksi terhadap garis $x = -4$. T_2 adalah refleksi terhadap garis $x = 6$. Bayangan titik $A(-2, 4)$ oleh transformasi T_2 dilanjutkan oleh T_1 adalah adalah

A. $A'(-6, 4)$

D. $A'(-22, 4)$

B. $A'(6, 4)$

E. $A'(-18, 4)$

C. $A'(-18, 4)$

Jawaban: D

⇔ Bayangan akhir setelah refleksi terhadap garis $x = 6$ dilanjutkan dengan refleksi terhadap garis $x = -4$ adalah:

$$P''(x'', y'') = P'' \{2(b - a) + x, y'\}$$

$$A' = P'' \{2(-4 - 6) - 2, 4\}$$

$$A' = P''(-22, 4)$$

B. KOMPOSISI TRANSFORMASI

Jika T_1 adalah suatu transformasi yang memetakan objek P ke objek lain P' , kemudian dilanjutkan oleh transformasi T_2 objek P' dipetakan ke obyek P'' , maka secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

- Bayangan hasil komposisi transformasi translasi adalah:

$$P'' = T \cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = T + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dengan } T = T_2 + T_1$$

- Bayangan hasil komposisi transformasi refleksi, rotasi, dan dilatasi adalah:

$$P'' = T \cdot P \rightarrow \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ dengan } T = T_2 \circ T_1$$

Catatan: Jika $T_1 = R_{\theta_1}$ dan $T_2 = R_{\theta_2} \rightarrow T = T_2 \circ T_1$

$$= R_{\theta_1 + \theta_2}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

9. Matriks transformasi yang mewakili pencerminan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan rotasi 90° berlawanan arah jarum jam dengan pusat O adalah

A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow T_1 = \text{pencerminan thp sb-} x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = R_{-90^\circ} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T = T_2 \circ T_1$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Vektor $\vec{x} = (x_1, x_2)$ diputar 90° berlawanan arah jarum, kemudian dicerminkan terhadap sumbu x untuk menghasilkan vektor $\vec{y} = (y_1, y_2)$. Jika $\vec{x} = A\vec{y}$ maka A adalah

A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow T_1 = R_{90^\circ}$$

$T_2 = \text{Pencerminan terhadap sumbu } x$

$$\Leftrightarrow T = T_2 \circ T_1$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P' = TP$$

$$\vec{y} = T \cdot \vec{x} \rightarrow \vec{x} = T^{-1} \cdot \vec{y} \rightarrow \vec{x} = A \vec{y}$$

$$\text{sehingga } A = T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Jika titik (a, b) dicerminkan terhadap sumbu y , kemudian dilanjutkan dengan transformasi sesuai matriks $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ menghasilkan titik $(1, -8)$, maka nilai $a + b = \dots$ **(SOAL UN)**
- A. -3 D. 1
 B. -2 E. 2
 C. -1

Jawaban: C

$\Leftrightarrow T_1 =$ pencerminan terhadap sumbu $-y$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dan } T_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = T_2 \circ T_1$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$T = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow P' = T.P \rightarrow P = T^{-1}.P'$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Nilai $a + b = 2 - 3 = -1$

12. Diketahui lingkaran L berpusat di titik $(-2, 3)$ dan melalui titik $(1, 5)$. Jika lingkaran L diputar 90° terhadap titik $O(0, 0)$ searah jarum jam, kemudian digeser ke bawah sejauh 5 satuan, maka persamaan lingkaran L yang dihasilkan adalah
- A. $x^2 + y^2 - 6x + 6y + 5 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 6x - 6y - 5 = 0$
 B. $x^2 + y^2 - 6x + 6y - 5 = 0$ E. $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$
 C. $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 5 = 0$

Jawaban: A

⇔ Jari-jari lingkaran L

$r =$ jarak antara titik $(-2,3)$ ke titik $(1,5)$

$$= \sqrt{(-2-1)^2 + (3-5)^2}$$

$$= \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

⇔ Pusat lingkaran L setelah diputar sejauh 90° searah jarum jam dapat diperoleh dari:

$$L' = T \cdot L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(x-3)^2 + (y-2)^2 = (\sqrt{13})^2$$

⇔ Bayangan akhir setelah digeser ke bawah sejauh 5 satuan adalah:

$$(x-3)^2 + \{(y+5)-2\}^2 = 13$$

$$(x-3)^2 + (y+3)^2 = 13$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 6y + 5 = 0$$

13. Bayangan kurva $y = \sin x$ oleh refleksi terhadap sumbu x dilanjutkan dengan dilatasi berpusat di $O(0, 0)$ dan faktor skala $\frac{1}{2}$ adalah kurva

....

A. $y = \sin 2x$

D. $y = -\sin x \cos x$

B. $y = \frac{1}{2} \sin x$

E. $y = -\sin 2x$

C. $y = \sin x \cos x$

Jawaban: D

⇔ $T_1 =$ Refleksi terhadap sb- $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$T_2 = \text{Dilatasi } [\frac{1}{2}, 0] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$T = T_2 \cdot T_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P' = T.P \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x' = \frac{1}{2} x' x = 2 x'$$

$$y' = -\frac{1}{2} y' y = -2 y'$$

$$\Leftrightarrow P : y = \sin x$$

$$P' : -2 y' = \sin 2 x'$$

$$y' = -\frac{1}{2} \sin 2 x'$$

$$y = -\frac{1}{2} \{ 2 \sin x \cos x \}$$

$$y = -\sin x \cos x$$

14. Titik P(a,b) dicerminkan terhadap sumbu x bayangannya dicerminkan pula terhadap sumbu y, maka bayangan terakhir titik P merupakan
- pencerminan titik P terhadap garis $y = x$
 - pencerminan titik P terhadap garis $y = -x$
 - pencerminan titik P terhadap sumbu-y
 - perputaran titik P dengan pusat titik O(0,0) sebesar π radian berlawanan perputaran jarum jam
 - perputaran titik P dengan pusat titik O(0,0) sebesar $\frac{\pi}{2}$ radian berlawanan perputaran jarum jam.

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow T_1 = \text{pencerminan thp sb-x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \text{pencerminan thp sb-y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \text{matriks transformasi perputaran titik P dengan}$$

pusat titik O(0,0) sebesar π radian berlawanan perputaran jarum jam

15. Persamaan bayangan garis $2x + 3y + 1 = 0$ karena refleksi terhadap sumbu Y dilanjutkan rotasi pusat O sebesar $\frac{\pi}{2}$ adalah

A. $2x - 3y - 1 = 0$

D. $3x - 2y - 1 = 0$

B. $2x + 3y - 1 = 0$

E. $3x + 2y - 1 = 0$

C. $3x + 2y + 1 = 0$

Jawaban: E

\Leftrightarrow P: $2x + 3y + 1 = 0$

\Leftrightarrow $T_1 =$ pencerminan thd sb-y $= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$T_2 =$ rotasi sebesar $\frac{\pi}{2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

\Leftrightarrow $P' = T.P \rightarrow P = T^{-1}.P'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y' \\ -x' \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Bayangannya:

$P': 2(-y') + 3(-x') + 1 = 0$

$3x + 2y - 1 = 0$

16. Persamaan bayangan parabola $y = x^2 - 3$, karena refleksi terhadap sumbu X dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan

matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah

- A. $y^2 + x^2 - 2xy - x + 2y - 3 = 0$
 B. $y^2 + x^2 + 2xy + x - 2y - 3 = 0$
 C. $y^2 + x^2 - 2xy + x - 2y - 3 = 0$
 D. $y^2 + x^2 + 2xy + x + 2y - 3 = 0$
 E. $y^2 + x^2 + 2xy + x + 2y - 3 = 0$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow P: y = x^2 - 3$$

$$\Leftrightarrow T_1 = \text{pencerminan thp sb-X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = T_2 \circ T_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{-2+1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow P' = T.P \rightarrow P = T^{-1}.P'$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - y' \\ x' - 2y' \end{pmatrix}$$

\Leftrightarrow Bayangannya adalah P' :

$$(x' - 2y') = (x' - y')^2 - 3$$

$$x - 2y = x^2 - 2xy + y^2 - 3$$

$$y^2 + x^2 - 2xy - x + 2y - 3 = 0$$

LATIHAN SOAL 15

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Matriks M mentransformasikan titik $(2, 5)$ dan $(-3, 1)$ berturut-turut ke titik $(-8, 6)$ dan $(-5, -9)$. M sama dengan

A. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

2. Bayangan titik $(a - 2b, a + b)$ setelah ditranslasi oleh matriks $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

adalah titik $(8, 1)$. Dengan translasi yang sama, bayangan titik $(2b, a + 1)$ adalah titik

A. $(4, 6)$

D. $(1, 3)$

B. $(0, 2)$

E. $(2, 4)$

C. $(3, 5)$

3. Bayangan kurva $y = {}^3\log 3(x - 2)$ oleh translasi matriks $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ adalah kurva $y = {}^3\log(x + 1) - 2$. Nilai $p - q = \dots$
- A. 0
B. -3
C. -6
D. 3
E. 6
4. Garis $y = 2x - 5$ ditransformasikan oleh transformasi yang berkaitan dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Persamaan bayangan garis itu adalah
- A. $9x + 8y + 25 = 0$
B. $9x - 8y - 7 = 0$
C. $9x + 8y - 7 = 0$
D. $9x + 8y - 25 = 0$
E. $9x - 8y - 25 = 0$
5. Persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$ karena transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ adalah
- A. $4x^2 + y^2 = 1$
B. $x^2 + 4y^2 = 1$
C. $4x^2 + y^2 = 4$
D. $x^2 + 4y^2 = 4$
E. $4x^2 + 2y^2 = 1$
6. OABC adalah sebuah jajaran genjang dengan koordinat titik $O(0, 0)$, $A(4, 0)$, dan $C(2, 6)$. Jika bidang ini dilatasi dengan $[0, 3]$, maka luas bayangannya adalah
- A. 72 satuan luas
B. 108 satuan luas
C. 144 satuan luas
D. 216 satuan luas
E. 512 satuan luas
7. Segitiga ABC dengan $A(2, 1)$, $B(8, 3)$, dan $C(6, 5)$ dilatasi terhadap pusat $O(0, 0)$ dengan faktor skala 2. Luas bangun hasil dilatasinya adalah segitiga $A' B' C' = \dots$
- A. 8 satuan luas
B. 16 satuan luas
C. 24 satuan luas
D. 32 satuan luas
E. 64 satuan luas

8. Jika lingkaran yang berpusat di $(3, -4)$ dan menyinggung sumbu x dicerminkan pada $y = -x$, maka persamaan lingkaran yang terjadi adalah
- $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 9 = 0$
 - $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 16 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 9 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 8x + 6y + 16 = 0$
 - $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 9 = 0$
9. Jika kurva L ditransformasikan oleh $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, maka hasil transformasinya mempunyai persamaan $x^2 + y^2 - 4x + 4y - 6 = 0$, maka luas kurva L adalah ... satuan luas.
- $1,0 \pi$
 - $1,1 \pi$
 - $1,2 \pi$
 - $1,3 \pi$
 - $1,4 \pi$
10. Matriks transformasi yang membawa irisan kerucut $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ menjadi $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ adalah
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
 - $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$
11. Darifungsikuadrat $y = f(x)$ diketahui bahwa fungsi $y = f(x + a)$ mencapai nilai maksimum untuk $x = p$. Maka, dapat ditarik kesimpulan bahwa fungsi $y = f(x - a)$ mencapai maksimum untuk
- $x = p - a$
 - $x = p + a$
 - $x = p - 2a$
 - $x = p + 2a$
 - $x = 2a - p$

12. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ puncaknya (p, q) , dicerminkan terhadap garis $y = q$ menghasilkan parabola $y = kx^2 + lx + m$. Nilai $a + b + c + k + l + m$ adalah
- A. q
 B. $2p$
 C. p
 D. $2q$
 E. $p+q$

SOAL LATIHAN - 2

13. Transformasi T merupakan transformasi pencerminan terhadap garis $y = -2x$ dilanjutkan pencerminan terhadap garis $y = \frac{1}{2}x$. Matriks penyajian T adalah

- A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

14. Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ diputar mengelilingi pusat koordinat O sejauh 90° dalam arah berlawanan dengan perputaran jarum jam. Hasilnya dicerminkan terhadap sumbu x, menghasilkan vektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Jika $\vec{x} = A \vec{y}$, maka $A = \dots$

- A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
 C. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

19. Vektor \bar{x} diputar terhadap titik asal O sebesar $\theta > 0$ searah jarum jam. Kemudian hasilnya dicerminkan terhadap garis $x = 0$, menghasilkan vektor \bar{y} . Jika $\bar{y} = A\bar{x}$, maka matriks $A = \dots$

A. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

20. Diketahui titik $A(3, -2)$ dipetakan oleh translasi $T = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, kemudian dilanjutkan oleh rotasi dengan pusat $O(0, 0)$ sejauh 90° . Koordinat hasil peta A adalah

A. $(4, 4)$

D. $(0, -3)$

B. $(-4, 4)$

E. $(-3, 0)$

C. $(4, -4)$

21. Persamaan bayangan lingkaran $x^2 + y^2 = 4$ jika dicerminkan terhadap garis $x = 2$ dilanjutkan dengan translasi $\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ adalah

A. $x^2 + y^2 - 2x - 8y + 13 = 0$

D. $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 13 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 13 = 0$

E. $x^2 + y^2 + 8x - 2y + 13 = 0$

C. $x^2 + y^2 - 2x + 8y + 13 = 0$

22. Bayangan garis $x - 2y = 5$ jika ditransformasikan dengan matriks transformasi $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dilanjutkan dengan pencerminan terhadap sumbu X adalah

A. $11x + 4y = 5$

D. $3x + 5y = 5$

B. $4x + 2y = 5$

E. $x + 11y = 5$

C. $4x + 11y = 5$

23. Titik A'(3, 4) dan B'(1,6) merupakan bayangan titik A(2, 3) dan B(-4, 1) oleh transformasi $T_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ yang diteruskan $T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Bila koordinat peta titik C oleh transformasi $T_2 \circ T_1$ adalah C' (-5, -6), maka koordinat titik C adalah
- A. (4, 5) D. (-5, 4)
 B. (4, -5) E. (5, 4)
 C. (-4, -5)
24. Bayangan kurva $y = x^2 - 3$ jika dicerminkan terhadap sumbu x dilanjutkan dengan dilatasi pusat O dan faktor skala 2 adalah
- A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 6$ D. $y = 6 - \frac{1}{2}x^2$
 B. $y = \frac{1}{2}x^2 - 6$ E. $y = 6 + \frac{1}{2}x^2$
 C. $y = \frac{1}{2}x^2 - 3$
25. Bayangan kurva $y = \cos x$ oleh refleksi terhadap sumbu y dilanjutkan dengan dilatasi pada O(0, 0) dan faktor skala 2 adalah kurva
- A. $y = 2 \cos 2x$ D. $y = \frac{1}{2} \cos 2x$
 B. $y = \cos \frac{x}{2}$ E. $y = \cos 2x$
 C. $y = 2 \cos \frac{x}{2}$
26. Lingkaran $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$ ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dan dilanjutkan oleh matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ maka bayangan lingkaran itu adalah
- A. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 12 = 0$
 B. $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$ E. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$
 C. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$
27. Bayangan garis $x + 3y + 2 = 0$ oleh transformasi yang berkaitan dengan matriks $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dilanjutkan matriks $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah
- A. $13x - 5y + 4 = 0$ D. $-5x + 4y - 2 = 0$
 B. $13x - 5y - 4 = 0$ E. $13x - 5y + 2 = 0$
 C. $-5x + 4y + 2 = 0$

28. Matriks yang menyatakan perputaran sebesar $\frac{\pi}{3}$ terhadap O dalam arah berlawanan dengan jarum jam dan dilanjutkan dengan pencerminan terhadap garis $x + y = 0$ adalah

A. $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

D. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

B. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

E. $-\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 \\ 1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

C. $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$

29. Garis $2x - y + 1 = 0$ diputar dengan R $[0, 30^\circ]$, kemudian diputar lagi dengan R $[0, 60^\circ]$. Persamaan bayangannya adalah

A. $x - 2y + 1 = 0$

D. $2y - x + 1 = 0$

B. $x + 2y - 1 = 0$

E. $2y + x + 1 = 0$

C. $2y - x - 1 = 0$

30. Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ dicerminkan terhadap sumbu x, hasilnya dicerminkan

terhadap sumbu y dan hasil ini diputar mengelilingi pusat koordinat O sejauh 90° dalam arah yang berlawanan dengan putaran jarum

jam menghasilkan vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, matrik transformasi yang mentransformasi berbentuk

A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

31. Sebuah lingkaran berpusat di P (3, 2) dengan jari-jari 5 satuan dirotasikan R (0, 90°) kemudian dicerminkan terhadap sumbu x. Persamaan bayangannya adalah
- A. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 12 = 0$ D. $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$
 B. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 23 = 0$ E. $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$
 C. $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
32. Garis dengan persamaan $2x - y - 6 = 0$ dicerminkan sumbu $y = x$ dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Persamaan bayangannya adalah
- A. $2x + 5y + 6 = 0$ D. $2x + 2y - 6 = 0$
 B. $2x + 5y - 6 = 0$ E. $5x + 2y + 6 = 0$
 C. $2x + 3y - 6 = 0$
33. Titik P(x, y) ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Bayangannya ditransformasikan pula oleh matriks $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bayangan terakhir titik P adalah
- A. $(-x, -y)$ D. $(-y, x)$
 B. $(-x, y)$ E. $(-y, -x)$
 C. $(x, -y)$
34. Bayangan segitiga ABC dengan A(-1, 3), B(2, -4), dan C (1, 5) karena rotasi pusat (0, 0) sebesar $\frac{\pi}{2}$ dilanjutkan refleksi terhadap garis $y = x$ adalah
- A. A' (1, 3), B' (-2, -4), dan C' (-1, 5)
 B. A' (-1, -3), B' (2, 4), dan C' (1, -5)
 C. A' (-1, 3), B' (2, -4), dan C' (1, 5)
 D. A' (-3, -1), B' (4, 2), dan C' (5, 1)
 E. A' (3, -1), B' (2, 4), dan C' (1, -5)

35. Persegi panjang PQRS dengan titik P(1, 0), Q(-1, 0), R(-1, 1), dan S(1, 1). Karena dilatasi [O, 3] dilanjutkan rotasi pusat O bersudut $\frac{1}{2}\pi$. Luas bayangan bangun tersebut adalah
- A. 2 satuan luas
B. 6 satuan luas
C. 9 satuan luas
D. 18 satuan luas
E. 20 satuan luas
36. Lingkaran $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $x + y = 4$ dan dilatasi dengan [O, 3]. Maka luas bangun hasil transformasi tersebut adalah
- A. $\frac{4}{9}\pi$
B. $\frac{16}{9}\pi$
C. 12π
D. 36π
E. 144π
37. Persamaan peta suatu kurva oleh rotasi pusat O bersudut $\frac{\pi}{2}$, dilanjutkan dilatasi [O, 2] adalah $x = 2 + y - y^2$. Persamaan kurva semula adalah
- A. $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + 4$
B. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x - 4$
C. $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$
D. $y = -2x^2 + x + 1$
E. $y = 2x^2 - x - 1$
38. Persamaan peta garis $2x - y + 5 = 0$ karena refleksi terhadap garis $x + 3 = 0$, dilanjutkan oleh transformasi yang bersesuaian dengan matriks $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah
- A. $3x - 10y + 17 = 0$
B. $3x - 10y + 14 = 0$
C. $3x - 10y - 14 = 0$
D. $3x + 2y - 7 = 0$
E. $x + 2y - 14 = 0$

39. Lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ dicerminkan terhadap garis $x = -10$ kemudian digeser sejauh $\begin{pmatrix} 15 \\ 4 \end{pmatrix}$, maka pusat bayangan lingkaran tersebut adalah
- A. $(-8, 2)$ D. $(-8, 4)$
B. $(-11, 4)$ E. $(-10, 8)$
C. $(10, -2)$
40. Persamaan bayangan dari garis $x + 3y + 2 = 0$ setelah ditransformasikan oleh matriks $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ kemudian dilanjutkan dengan transformasi yang berkaitan dengan matriks $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ adalah
- A. $-x + 3y + 2 = 0$ D. $-2x - 3y + 2 = 0$
B. $-2x + 3y + 1 = 0$ E. $-2x + y + 2 = 0$
C. $-2x - y + 2 = 0$



BARISAN DAN DERET

16

A. BARISAN DAN DERET

Barisan bilangan adalah urutan bilangan–bilangan yang disusun berdasarkan pola tertentu.

Deret adalah penjumlahan dari suku–suku suatu barisan.

Symbol yang digunakan pada barisan dan deret:

- **a** = U_1 = suku pertama
- **b** = beda/seleisih
- **r** = rasio/pembanding
- **U_n** = suku ke– n
- **S_n** = jumlah n suku pertama
- **U_t** = suku tengah

Suku ke $-n$ dari rumus jumlah suku–suku untuk **semua barisan** (aritmetika, geometri, dll) adalah $U_n = S_n - S_{n-1}$ dengan S_n = jumlah n suku pertama.

B. BARISAN DAN DERET ARITMETIKA

Barisan aritmetika adalah barisan yang memiliki selisih/beda B . yang nilainya tetap pada setiap dua suku yang berurutan.

Pola suku–suku barisan aritmetika: $a, (a + b), (a + 2b), \dots, U_n$.

- **Beda** $\rightarrow b = U_n - U_{n-1}$
- **Suku ke–n** $\rightarrow U_n = a + (n-1)b$
- **Jumlah n suku pertama** $\rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$ atau

$$S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$
- **Suku tengah** $\rightarrow 2 \cdot U_t = (a + U_n)$

$S_n = n \cdot U_t$, dengan $n \in$ bilangan ganjil

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Dari suatu barisan aritmetika diketahui suku ke–5 adalah 22 dan suku ke–12 adalah 57. Suku ke–15 barisan tersebut ini adalah

- | | |
|-------|-------|
| A. 62 | D. 74 |
| B. 68 | E. 76 |
| C. 72 | |

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow U_n = a + (n-1)b$$

- | | |
|-----------------|-----------------------------|
| • $U_5 = 22$ | $\rightarrow a + 4b = 22$ — |
| • $U_{12} = 57$ | $\rightarrow a + 11b = 57$ |
| | $-7b = -35$ |
| | $b = 5$ |

substitusikan $b = 5$ ke pers (1) $\rightarrow a = 2$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } U_{15} = a + 14b = 2 + 14(5) = 72$$

2. Diketahui barisan aritmetika dengan U_n adalah suku ke–n. Jika $U_2 + U_{15} + U_{40} = 165$, maka $U_{19} = \dots$

- | | |
|---------|---------|
| A. 10 | D. 55 |
| B. 19 | E. 82,5 |
| C. 28,5 | |

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow U_n = a + (n-1)b$$

$$U_2 + U_{15} + U_{40} = 165$$

$$(a+b) + (a+14b) + (a+39b) = 165$$

$$3a + 54b = 165$$

• dibagi (3) \rightarrow $\underbrace{a + 18b}_{U_{19}} = 55$

3. Dalam suatu deret aritmetika, jika $U_3 + U_7 = 56$ dan $U_6 + U_{10} = 86$, maka suku ke-2 deret tersebut adalah
- A. 8
B. 10
C. 12
D. 13
E. 15

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow U_3 + U_7 = 56$$

$$(a+2b) + (a+6b) = 56$$

$$2a + 8b = 56 \quad \dots(1)$$

$$U_6 + U_{10} = 86$$

$$(a+5b) + (a+9b) = 86$$

$$2a + 14b = 86 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Jika persamaan (1) - (2) akan diperoleh:

$$-6b = -30 \rightarrow b = 5$$

substitusikan $b = 5$ ke persamaan (1) diperoleh:

$$2a + 8(5) = 56$$

$$2a = 16 \rightarrow a = 8$$

$$\Leftrightarrow U_2 = a + b = 8 + 5 = 13$$

4. Jika $f(x) = f(x-1) + \frac{1}{4}$ dan $f(1) = 4$, maka $f(201) = \dots$
- A. 50
B. 51
C. 52
D. 53
E. 54

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow f(x) = f(x-1) + \frac{1}{4}$$

$$f(1) = 4 \rightarrow f(2) = f(1) + \frac{1}{4} = 4\frac{1}{4}$$

$$f(3) = f(2) + \frac{1}{4} = 4\frac{2}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(1), f(2), f(3), \dots \rightarrow \text{barisan aritmetika}$$

$$\text{dengan } a = 4 \text{ dan selisih } = b = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow f(201) = \text{suku ke } 201$$

$$= a + 200b$$

$$= 4 + 200\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 4 + 50 = 54$$

5. Jika $-999, -997, -995, \dots$ adalah barisan aritmetika, maka suku bernilai positif yang muncul pertama kali adalah suku ke

A. 500

D. 503

B. 501

E. 504

C. 502

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow -999, -997, -995, \dots \rightarrow \text{barisan aritmetika}$$

$$\bullet a = -999 \text{ dan } b = 2$$

$$\Leftrightarrow U_n > 0 \rightarrow a + (n+1)b > 0$$

$$(-999) + (n+1)(2) > 0$$

$$2n > 1001$$

$$n = 501$$

6. Diketahui deret aritmetika dengan suku keempat adalah 41 dan suku kesembilan adalah 26. Jumlah 10 suku pertama deret tersebut adalah

A. 350

D. 395

B. 365

E. 410

C. 370

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow U_n = a + (n+1)b$$

$$\bullet U_4 = 41 \rightarrow a + 3b = 41 \quad \dots(1)$$

$$\bullet U_9 = 26 \rightarrow a + 8b = 26 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Jika pers (1) – (2) diperoleh:
 $-5b = 15 \rightarrow b = -3$
 substitusikan $b = -3$ ke pers (1)
 $a + 3(-3) = 41 \rightarrow a = 50$

$\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$
 $S_{10} = \frac{10}{2}\{2(50) + 9(-3)\} = 365$

7. Jika jumlah 101 bilangan kelipatan tiga yang berurutan adalah 18180, maka jumlah tiga bilangan terkecil yang pertama dari bilangan-bilangan tersebut adalah
- | | |
|-------|-------|
| A. 99 | D. 72 |
| B. 90 | E. 63 |
| C. 81 | |

Jawaban: A

$\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1).b\}$

$\Leftrightarrow S_{101} = \frac{101}{2}(2a + 100(3))$
 $18180 = 101a + 15150 \rightarrow a = 30$

$$U_2 = 30 + 3 = 33$$

$$U_3 = 33 + 3 = 36$$

$\Leftrightarrow U_1 + U_2 + U_3 = 30 + 33 + 36 = 99$

8. Jika diketahui barisan 1, (1+2), (1+2+3), (1+2+3+4), (1+2+3+4+5), ... maka suku ke-100 dari barisan di atas adalah
- | | |
|---------|---------|
| A. 5550 | D. 5050 |
| B. 5500 | E. 5005 |
| C. 5055 | |

Jawaban: D

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \text{Suku ke-100} &= \underbrace{(1+2+3+\dots+100)}_{\frac{n}{2}(a+U_n)} \\
 &= \frac{100}{2}(1+100) = 5050
 \end{aligned}$$

9. Persamaan kuadrat $x^2 - 6x + a = 0$ mempunyai akar x_1 dan x_2 . Jika x_1 , x_2 dan $x_1 + x_2$ adalah tiga suku pertama deret aritmetika, maka konstanta $a = \dots$
- A. 2
B. 4
C. 6
- D. 8
E. 10

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow x^2 - 6x + a = 0 \rightarrow x_1 + x_2 = 6 \quad \dots(1)$$

$$x_1 \cdot x_2 = a \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow x_1, x_2, (x_1 + x_2) \rightarrow \text{barisan aritmetika}$$

$$2u_t = a + u_n$$

$$2x_2 = x_1 + (x_1 + x_2)$$

$$x_2 = 2x_1 \quad \dots(3)$$

$$\Leftrightarrow \text{substitusikan persamaan (3) ke pers (1) diperoleh:}$$

$$x_1 + 2x_1 = 6 \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = 4$$

$$(2) \rightarrow x_1 \cdot x_2 = a$$

$$2 \cdot 4 = a \rightarrow a = 8$$

10. Jika tiga suku pertama suatu deret aritmetika adalah x , $(x^2 + 1)$, dan $3x$, x bilangan asli, maka jumlah sembilan suku pertama deret tersebut adalah
- A. 63
B. 50
C. 45
- D. 30
E. 25

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x, (x^2 + 1), 3x \rightarrow \text{barisan aritmetika}$$

$$2U_t = a + U_n$$

$$2(x^2 + 1) = x + 3x$$

$$2x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$2(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1$$

untuk $x = 1$ barisannya $\rightarrow 1, 2, 3, \dots$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(1 + 9) = 45$$

11. Jumlah 101 bilangan genap berurutan adalah 13130. Jumlah 3 bilangan terkecil yang pertama dari bilangan-bilangan genap itu adalah

- A. 96
 B. 102
 C. 108
 D. 114
 E. 120

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)b\}$$

$$13130 = \frac{101}{2}\{2a + 100(2)\}$$

$$13130 = 101(a + 100)$$

$$a + 100 = \frac{13130}{101}$$

$$a + 100 = 130 \rightarrow a = 30$$

\Leftrightarrow Jadi, jumlah 3 bilangan genap terkecil yang pertama = $30 + 32 + 34 = 96$

12. Jumlah n suku pertama deret aritmetika ditentukan oleh $S_n = 2n^2 + n$. Jika U_n menyatakan suku ke- n deret tersebut, maka U_{12} adalah

- A. 41
 B. 47
 C. 48
 D. 49
 E. 300

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow U_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= (2n^2 + n) - (2(n-1)^2 + (n-1))$$

$$= (2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1)$$

$$U_{12} = 4n - 1$$

$$= 4(12) - 1 = 47$$

SOLUSI SMART!

$$S_n = pn^2 + qn$$

- $U_n = \text{turunan pertama } S_n - p$
 $= (2pn + q) - p$

$$\Leftrightarrow S_n = 2n^2 + n$$

$$U_n = (4n + 1) - 2$$

$$U_{12} = (48 + 1) - 2 = 47$$

13. Jumlah n suku pertama suatu deret aritmetika $S_n = n^2 + 4n$. Persamaan kuadrat yang akarnya suku ke-5 dan beda deret itu adalah

A. $x^2 + 11x + 22 = 0$

D. $x^2 - 11x + 22 = 0$

B. $x^2 - 33x + 231 = 0$

E. $x^2 - 15x + 26 = 0$

C. $x^2 - 17x + 30 = 0$

Jawaban: E

SOLUSI SMART!

$$S_n = pn^2 + qn$$

- $U_n = \text{turunan pertama } S_n - p$
 $= (2pn + q) - p$
- Beda $B. = \text{turunan kedua fungsi } S_n$
 $= 2p$

$$\Leftrightarrow S_n = n^2 + 4n$$

$$U_n = (2n + 4) - 1$$

$$U_5 = (2 \cdot 5 + 4) - 1 = 13 \rightarrow x_1$$

$$x_2 = b = S'' = 2$$

⇔ Persamaan kuadrat yang akar-akarnya 13 dan 2 adalah:

$$(x - 13)(x - 2) = 0$$

$$x^2 - 15x + 26 = 0$$

14. Gaji Pak Kadir pada tahun ke-4 dan tahun ke-10 berturut-turut adalah Rp200.000 dan Rp230.000. Gaji Pak Kadir mengalami kenaikan dengan sejumlah uang yang tetap. Gajinya pada tahun ke-15 adalah

A. Rp245.000

D. Rp260.000

B. Rp250.000

E. Rp265.000

C. Rp255.000

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow U_4 = 200.000 \rightarrow a + 3b = 200.000 \quad \dots(1)$$

$$U_{10} = 230.000 \rightarrow a + 9b = 230.000 \quad \dots(2)$$

$$\underline{\hspace{10em} -6b = -30.000 \hspace{1em} -}$$

$$b = 5.000$$

substitusikan $b = 5.000$ ke pers (1), diperoleh:

$$a + 3(5.000) = 200.000$$

$$a = 200.000 - 15.000$$

$$= 185.000$$

$$\Leftrightarrow U_{15} = a + 14b$$

$$= 185.000 + 14(5.000)$$

$$= 255.000$$

15. Pada sebuah kursus yang baru dibuka murid baru yang mendaftar setiap bulan bertambah dengan jumlah yang sama. Jumlah murid baru yang mendaftar pada bulan ke-2 dan murid baru yang mendaftar pada bulan ke-4 berjumlah 20 orang, sedangkan yang mendaftar pada bulan ke-5 dan bulan ke-6 adalah 40 orang. Jumlah semua murid kursus tersebut dalam 10 bulan pertama adalah

A. 220 orang

D. 190 orang

B. 200 orang

E. 180 orang

C. 198 orang

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow U_2 + U_4 &= 20 \\ (a+b) + (a+3b) &= 20 \\ 2a + 4b &= 20 \quad \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow U_5 + U_6 &= 40 \\ (a + 4b) + (a + 5b) &= 40 \\ 2a + 9b &= 40 \quad \dots(2) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh:

$$a = 2 \text{ dan } b = 4$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{n}{2} \{2a + (n-1)b\}$$

$$S_{10} = 5(2a + 9b) = 5(4 + 36) = 200$$

SOLUSI SMART!

• Jumlah n suku pertama deret Aritmetika adalah

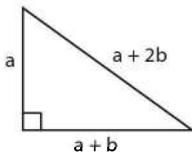
$$S_n = \frac{n}{2}(U_p + U_q), \text{ dengan syarat } n = (p+q) - 1$$

$$\Leftrightarrow S_{10} = \frac{10}{2}(U_5 + U_6) = 5(40) = 200$$

16. Panjang sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk barisan aritmetika. Jika keliling segitiga tersebut adalah 72, maka luasnya adalah

- | | |
|--------|--------|
| A. 216 | D. 383 |
| B. 363 | E. 432 |
| C. 364 | |

Jawaban: A



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Keliling } \Delta &= 72 = a + (a + b) + (a + 2b) \\ 72 &= 3a + 3b \quad \rightarrow \text{dibagi } 3 \end{aligned}$$

$$24 = a + b \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow (a + 2b)^2 = a^2 + (a + b)^2$$

$$a^2 + 4ab + 4b^2 = a^2 + a^2 + 2ab + b^2$$

$$0 = a^2 - 2ab - 3b^2$$

$$0 = (a - b)^2 - 4b^2$$

$$(2b)^2 = (a - b)^2$$

$$2b = a - b \rightarrow a = 3b \quad \dots(2)$$

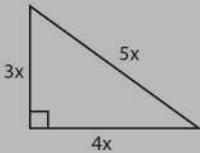
\Leftrightarrow substitusi pers (1) ke pers (2), maka:

$$24 = (3b + b) = 4b \rightarrow b = 6$$

$$a = 18$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} \cdot a \cdot (a + b) = \frac{1}{2} (18)(24) = 216$$

SOLUSI SMART!



\Leftrightarrow Perbandingan sisi-sisi Δ siku-siku yang membentuk barisan aritmetika adalah $a : b : c = 3 : 4 : 5$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling} = 3x + 4x + 5x$$

$$72 = 12x \quad \rightarrow x = 6$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} (4x)(3x) = 6x^2 = 6(36) = 216$$

17. Diketahui sebuah barisan mempunyai urutan suku sebagai berikut:

120, 60, 40, 30, Suku berikutnya adalah

- A. 24
B. 25
C. 30
D. 35
E. 36

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 60 = \frac{1}{2}(120), 40 = \frac{2}{3}(60), 30 = \frac{3}{4}(40)$$

$$\Leftrightarrow \text{Suku berikutnya} = \frac{4}{5}(30) = 24$$

18. Jika bilangan ganjil dikelompokkan seperti berikut: {1}, {3, 5}, {7, 9, 11}, {13, 15, 17, 19}, ..., maka suku tengah dari kelompok ke-17 adalah

- A. 9
- B. 81
- C. 136
- D. 145
- E. 289

Jawaban: E

⇔ Misal: kelompok ke 16: (... , $U_{(x-1)}$)
kelompok ke 17: (U_x, \dots, U_z)

⇔ Banyaknya bilangan dari kelompok 1 sampai 16

$$\begin{aligned}
 (x - 1) &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 16 \\
 &= \frac{n}{2}(a + U_n) \\
 &= 8(1 + 16) = 136 \\
 x &= 137
 \end{aligned}$$

⇔ Kelompok ke-17 terdiri atas 17 bilangan sehingga $z = x + (17 - 1) = 153$

Jadi suku tengah kelompok 17 adalah:

$$U_t = U_{\left(\frac{x+z}{2}\right)} = U_{145}$$

⇔ **$U_n = a + (n-1)b$**

$$U_{145} = 1 + (144) \cdot 2 = 289$$

SOLUSI SMART!

⇔ **Kelompok ke- U_t**

(1)	1	$= 1^2$
(3, 5)	4	$= 2^2$
(7, 9, 11)	9	$= 3^2$
(13, 15, 17, 19), ...	16	$= 4^2$



Kelompok ke- n
Kelompok ke-17



$U_t = n^2$
 $U_t = (17)^2 = 289$

C. BARISAN DAN DERET GEOMETRI

Barisan geometri adalah barisan yang memiliki rasio/pembandingan (r) yang nilainya tetap pada setiap dua suku berurutan.

Pola suku - suku barisan geometri: a, ar, ar^2, \dots, U_n .

- **Rasio** $\rightarrow r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$
- **Suku ke- n** $\rightarrow U_n = a \cdot r^{n-1}$
- **Jumlah n suku pertama** $\rightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} = \frac{a(1 - r^n)}{(1 - r)}$
- **Suku tengah** $\rightarrow U_t^2 = a \cdot U_n$, dengan $n \in$ bilangan ganjil

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

19. Suku kedua dan kelima suatu barisan geometri berturut-turut adalah 2 dan 54. Suku ke-4 barisan geometri tersebut adalah

- A. 9
- B. 18
- C. 24
- D. 27
- E. 36

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow U_n = a \cdot r^{n-1}$$

$$\bullet U_2 = 2 \rightarrow ar = 2 \quad \dots(1)$$

$$\bullet U_5 = 54 \rightarrow ar^4 = 54 \quad \dots(2)$$

$$(ar) \cdot r^3 = 54$$

$$(2) \cdot r^3 = 54$$

$$r^3 = 27 \rightarrow r = 3$$

$$U_4 = a \cdot r^3 = (ar) \cdot r^2 = (2)(3)^2 = 18$$

20. Jika a, b, c, d, e membentuk barisan geometri dan $a \times b \times c \times d \times e = 128$, maka di antara kelima suku barisan itu yang dapat ditentukan nilainya adalah suku ke
- A. pertama
B. kedua
C. ketiga
D. keempat
E. kelima

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow a \times b \times c \times d \times e = 128$$

$$(a) \cdot (ar) \cdot (ar^2) \cdot (ar^3) \cdot (ar^4) = 128$$

$$(a^5 \cdot r^{10}) = 128$$

$$\underbrace{(a \cdot r^2)}_{U_3} = 128$$

Jadi, yang bisa ditentukan nilainya adalah suku ke-3

21. Misalkan U_n menyatakan suku ke- n suatu barisan geometri. Jika $U_6 = 64$ dan $\log U_2 + \log U_3 + \log U_4 = 9 \log 2$, maka nilai U_3 adalah
- A. 8
B. 6
C. 4
D. 3
E. 2

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \log U_2 + \log U_3 + \log U_4 = 9 \log 2$$

$$\log (ar \cdot ar^2 \cdot ar^3) = \log 2^9$$

$$(a^3 \cdot r^6) = 2^9$$

$$\underbrace{(ar^2)}_{U_3}^3 = (2^3)^3$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, } U_3 = ar^2 = 8$$

22. Jika x_1, x_2 akar-akar persamaan kuadrat $x^2 - (3k + 5)x + 2k + 3 = 0$ dan x_1, k, x_2 merupakan suku pertama, kedua, dan ketiga suatu barisan geometri dengan rasio $r \neq 1$, dan $r \neq -1$, maka $x_1 + k + x_2 = \dots$
- A. 16
B. 17
C. 18
D. 19
E. 20

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow x^2 - (3k + 5)x + (2k + 3) = 0$$

$$\bullet x_1 + x_2 = 3k + 5$$

$$\bullet x_1 \cdot x_2 = (2k + 3)$$

$\Leftrightarrow x_1, k, x_2 \rightarrow$ barisan geometri, berlaku:

$$(U_1)^2 = a \cdot U_n$$

$$k^2 = x_1 \cdot x_2$$

$$k^2 = (2k + 3)$$

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$(k - 3)(k + 1) = 0$$

$$\text{untuk } k = 3 \rightarrow x_1 + x_2 = 3(3) + 5 = 14$$

$$\Leftrightarrow x_1 + k + x_2 = 14 + 3 = 17$$

23. Diketahui sebuah barisan mempunyai urutan sebagai berikut: 32, 14, 16, 12, 8, 10 Suku ke-21 dari barisan di atas adalah

A. -6

D. $\frac{1}{2}$

B. -2

E. 2

C. $\frac{1}{32}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \underbrace{32}_{u_1}, \dots, \underbrace{16}_{u_3}, \dots, \underbrace{8}_{u_5}, \dots, \underbrace{\dots}_{u_{21}}?$$

U_{21} jatuh pada suku ke 11 barisan di atas

$$= a \cdot r^{10}$$

$$= (32) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$= 2^{5-10} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$$

24. Jika a adalah suku pertama, r adalah rasio, dan $S_n = 5^{n+2} - 25$ adalah jumlah n suku pertama deret geometri, maka nilai $a + r$ adalah

A. 95

D. 225

B. 105

E. 500

C. 125

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow S_n = 5^{n+2} - 25$$

$$\bullet a = U_1 = S_1 = 5^{1+2} - 25 = 100$$

$$\bullet U_2 = S_2 - S_1$$

$$U_2 = (5^4 - 25) - (100) = 500$$

$$\bullet r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{500}{100} = 5$$

$$\Leftrightarrow a + r = 100 + 5 = 105$$

25. Misalkan diberikan u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 adalah lima suku pertama deret geometri. Jika $\log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \log u_4 + \log u_5 = 5 \log 3$, maka u_3 sama dengan

A. 5

(D) 2

B. 4

E. $\frac{1}{3}$

C. 3

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \log u_1 + \log u_2 + \log u_3 + \log u_4 + \log u_5 = 5 \log 3$$

$$\log (a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4) = \log 3^5$$

$$(ar^2)^5 = 3^5$$

$$(ar^2) = 3$$

$$U_3 = 3$$

26. Jika S_n adalah jumlah n suku deret geometri yang rasionya r , maka

$$\frac{S_{4n}}{2S_{2n}} = \dots$$

A. r^{2n}

D. $\frac{1}{2}(r^{2n} + 1)$

B. $\frac{1}{2}(r^{2n} - 1)$

E. $r^{2n} + 1$

C. $\frac{1}{2} + r^{2n}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{S_{4n}}{2S_{2n}} &= \frac{a(r^{4n} - 1)}{2 \left\{ \frac{a(r^{2n} - 1)}{1} \right\}} \\ &= \frac{(r^{2n} - 1)(r^{2n} + 1)}{2(r^{2n} - 1)} \\ &= \frac{1}{2}(r^{2n} + 1)\end{aligned}$$

27. Bakteri jenis A berkembang biak menjadi dua kali lipat setiap lima menit, pada waktu lima menit pertama banyaknya bakteri ada 400. Banyak bakteri pada waktu tiga puluh menit pertama adalah
- A. 640 bakteri D. 12.800 bakteri
B. 3.200 bakteri E. 32.000 bakteri
C. 6.400 bakteri

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \text{Lima belas menit pertama} = 400 = U_4$$

$$U_4 = a \cdot r^3 \rightarrow a \cdot (2)^3 = 400$$

$$a = \frac{400}{8} = 50$$

$$\Leftrightarrow \text{Tiga puluh menit pertama} = U_7$$

$$U_7 = a \cdot r^6$$

$$= (50) \cdot (2)^6 = (50)(64) = 32.000$$

28. Jika jumlah 100 suku pertama suatu deret geometri adalah π , dan jumlah 200 suku pertamanya adalah 3π , maka jumlah 700 suku pertamanya adalah
- A. 8π D. 63π
B. 10π E. 127π
C. 15π

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$$

$$\bullet S_{100} = \frac{a(r^{100} - 1)}{r - 1} = \pi \quad \dots(1)$$

$$\bullet S_{200} = \frac{a(r^{200} - 1)}{r - 1} = 3\pi \quad \dots(2)$$

$$\frac{a(r^{100} - 1)}{r - 1} \cdot (r^{100} + 1) = 3\pi$$

$$(\pi) \cdot (r^{100} + 1) = 3\pi$$

$$r^{100} + 1 = 3 \rightarrow r^{100} = 2$$

$$\Leftrightarrow S_{700} = \frac{a(r^{700} - 1)}{r - 1}$$

$$S_{700} = \frac{\pi(2^7 - 1)}{2 - 1} = 127\pi$$

29. Setelah mengenai lantai, sebuah bola memantul sampai ke ketinggian 4 m, kemudian sampai ketinggian 2 m, selanjutnya 1 m dan seterusnya. Jarak yang ditempuh selama enam pantulan pertama adalah

A. $\frac{63}{4}$ m

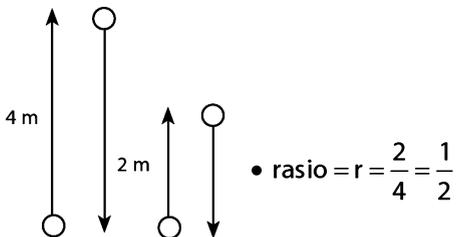
D. $\frac{63}{32}$ m

B. $\frac{63}{8}$ m

E. $\frac{62}{32}$ m

C. $\frac{31}{4}$ m

Jawaban: D



$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \text{Jarak yang ditempuh selama enam pantulan pertama adalah:} \\
&= 2 \cdot S_6 \\
&= 2 \cdot \left(\frac{a(1-r^6)}{1-r} \right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{4(1-\frac{1}{64})}{1-\frac{1}{2}} \right) \\
&= 16 \cdot \frac{63}{64} = \frac{63}{4}
\end{aligned}$$

30. Suatu tali dibagi menjadi tujuh bagian dengan panjang yang membentuk suatu barisan geometri. Jika yang paling pendek adalah 3 m dari yang paling panjang 192 cm, maka panjang tali semula sama dengan

- | | |
|--------|--------|
| A. 379 | D. 385 |
| B. 381 | E. 387 |
| C. 383 | |

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow n = 7, a = 3 \text{ dan } U_7 = 192$$

$$\Leftrightarrow U_7 = 192 \rightarrow a \cdot r^6 = 192$$

$$3 \cdot r^6 = 192$$

$$r^6 = \frac{192}{3} = 64 = 2^6$$

$$r = 2$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} \rightarrow S_7 = \frac{3(2^7 - 1)}{2 - 1} = 381$$

31. Suatu koloni bakteri membelah diri menjadi dua setiap 6 jam dan pada setiap 12 jam seperempat bagian dari koloni itu tidak bertahan hidup, Jika pada awal pengamatan terdapat x bakteri, maka setelah 36 jam, jumlah bakteri dalam koloni tersebut adalah

- | | |
|--------|--------|
| A. 6x | D. 48x |
| B. 24x | E. 64x |
| C. 27x | |

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \underbrace{x. 2x}_{6 \text{ jam}} \underbrace{4x}_{12 \text{ jam}}$$
$$\underbrace{3x. 6x}_{18 \text{ jam}} \underbrace{12x}_{24 \text{ jam}}$$
$$\underbrace{9x. 18x}_{30 \text{ jam}} \underbrace{36x}_{36 \text{ jam}}$$

\Leftrightarrow Jadi, jumlah koloni bakteri setelah 36 jam

$$= 36x - \frac{1}{4}(36x)$$
$$= 27x$$

32. Berdasarkan penelitian diketahui bahwa populasi hewan A berkurang menjadi setengahnya tiap 10 tahun. Pada tahun 2000 populasinya tinggal 1 juta. Banyak populasi hewan A pada tahun 1960 sekitar
- A. 64 juta
B. 32 juta
C. 16 juta
D. 8 juta
E. 4 juta

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow '60 \quad '70 \quad '80 \quad '90 \quad \underline{'00}$$

1 juta

$$a \cdot r^4 = 1 \text{ juta}$$

$$a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \text{ juta}$$

$$a = 16 \text{ juta}$$

\Leftrightarrow Jadi, banyak populasi hewan A pada tahun 1960 adalah 16 juta.

33. Tiga buah bilangan membentuk barisan aritmetika dengan beda tiga. Jika suku kedua dikurangi 1, maka terbentuklah barisan geometri dengan jumlah 14. Rasio barisan tersebut adalah
- A. 4
B. 2
C. $\frac{1}{2}$
D. $-\frac{1}{2}$
E. -2

Jawaban: B

⇔ $a, (a + 3), (a + 6) \rightarrow$ barisan aritmetika

$a, (a + 2), (a + 6) \rightarrow$ barisan geometri

$$(u_t)^2 = a \cdot u_n$$

$$(a + 2)^2 = a(a + 6)$$

$$a^2 + 4a + 4 = a^2 + 6a$$

$$2a = 4 \rightarrow a = 2$$

⇔ Untuk $a = 2$, maka barisan geometrinya adalah $2, 4, 8, \dots \rightarrow$

$$r = \frac{4}{2} = 2$$

34. Misalkan $a, 8, c, d$ merupakan suatu barisan aritmetika. Jika $a, 8, d$ merupakan barisan geometri, maka nilai $a + c + d$ adalah

A. 12 atau 24

D. 24 atau 36

B. 16 atau 32

E. 25 atau 36

C. 24 atau 32

Jawaban: C

⇔ $a, 8, c, d \rightarrow$ B.Aritmetika

$$\bullet 8 - a = c - 8 \rightarrow 16 = a + c \quad \dots(1)$$

$$\bullet c - 8 = d - c \rightarrow -8 = d - 2c \quad \dots(2)$$

Substitusi (1) ke (2), diperoleh:

$$-8 = d - 2(16 - a)$$

$$24 = d + 2a \quad \dots(3)$$

$a, 8, d \rightarrow$ B.Geometri

$$\bullet 82 = a \cdot d \quad \dots(4)$$

Substitusi (3) ke (4), diperoleh:

$$64 = a(24 - 2a) \rightarrow a^2 - 12a + 32 = 0$$

$$(a - 8)(a - 4) = 0$$

⇔ Untuk $a = 8 \rightarrow c = 8 \rightarrow d = 8$

$$a + c + d = 24$$

Untuk $a = 4 \rightarrow c = 12 \rightarrow d = 16$

$$a + c + d = 32$$

D. DERET GEOMETRI TAK HINGGA

a. Deret Konvergen

Deret geometri tak hingga **konvergen** adalah deret geometri tak hingga yang memiliki limit jumlah.

- Syarat: $|r| < 1$ dapat ditulis $-1 < r < 1$
- Jumlah sampai tak hingga: $S_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

b. Deret Divergen

Deret geometri tak hingga **divergen** adalah deret geometri tak hingga yang tidak memiliki limit jumlah.

- Syarat: $|r| > 1$ dapat ditulis $r > 1$ atau $r < -1$
- Jumlah sampai tak hingga = S_{∞} = tidak ada

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

35. Jumlah deret geometri tak hingga $8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{9} - \frac{8}{27} + \dots$ adalah

- | | |
|-------------------|-------|
| A. $5\frac{2}{9}$ | D. 12 |
| B. 6 | E. 24 |
| C. $6\frac{2}{9}$ | |

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow 8 - \frac{8}{3} + \frac{8}{9} + \dots \rightarrow \bullet a = 8$$

$$\bullet r = \frac{U_2}{U_1} = \frac{-\frac{8}{3}}{8} = -\frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-(-\frac{1}{3})} = 6$$

36. Diketahui deret geometri tak hingga $u_1 + u_2 + u_3 + \dots$. Jika rasio deret tersebut adalah r dengan $-1 < r < 1$, $u_1 + u_2 + u_3 + \dots = 6$ dan $u_3 + u_4 + u_5 + \dots = \frac{2}{3}$, maka nilai r adalah

A. $-\frac{1}{9}$ atau $\frac{1}{9}$

D. $-\frac{4}{9}$ atau $\frac{4}{9}$

B. $-\frac{2}{9}$ atau $\frac{2}{9}$

E. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$ atau $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

C. $-\frac{1}{3}$ atau $\frac{1}{3}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \bullet a + ar + ar^2 + \dots = 6 \rightarrow \frac{a}{1-r} = 6 \quad \dots(1)$$

$$\bullet ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots = \frac{2}{3}$$

$$\frac{ar^2}{1-r} = \frac{2}{3} \rightarrow \left(\frac{a}{1-r}\right) \cdot r^2 = \frac{2}{3}$$

$$6 \cdot r^2 = \frac{2}{3}$$

$$r^2 = \frac{1}{9} \rightarrow r = \pm \frac{1}{3}$$

37. Jika $(k + 6)$, $(k - 2)$, dan $(k - 6)$ berturut-turut adalah suku pertama, kedua dan ketiga suatu deret geometri tak hingga, maka jumlah deret tak hingga tersebut adalah

A. 2

D. 16

B. 4

E. 32

C. 8

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow (k + 6), (k - 2), (k - 6) \rightarrow \text{barisan geometri}$$

$$(U_t)^2 = a \cdot U_n$$

$$(k - 2)^2 = (k + 6)((k - 6))$$

$$k^2 - 4k + 4 = k^2 - 36$$

$$-4k = -40 \rightarrow k = 10$$

⇔ untuk $k = 10$, barisan tersebut menjadi $16, 8, 4, \dots \rightarrow r = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 16 + 8 + 4 + \dots = S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{16}{1-\frac{1}{2}} = 32$$

38. Sudut θ di kuadran kedua yang memenuhi $\cos^2 \theta - \cos^4 \theta + \cos^6 \theta + \dots = \frac{1}{3}$ adalah

A. $\frac{2}{3} \neq$

D. $\frac{5}{6} \neq$

B. $\frac{3}{4} \neq$

E. $\frac{11}{12} \neq$

C. $\frac{7}{12} \neq$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \cos^2 \theta - \cos^4 \theta + \cos^6 \theta + \dots = \frac{1}{3}$$

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} = \frac{1}{3}$$

$$3 \cos^2 \theta = \cos^2 \theta + 1$$

$$2 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

• (θ di kuadran II)

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \sqrt{2} \rightarrow \theta = \frac{3}{4} \pi$$

39. Jumlah semua suku bernomor ganjil dari deret geometri tak hingga adalah 4. Jika jumlah deret itu adalah 6, maka jumlah 2 suku pertamanya adalah

A. $\frac{15}{4}$

D. $\frac{9}{8}$

B. $\frac{27}{8}$

E. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{9}{2}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = 6 \quad \dots(1)$$

$$S_{\infty(\text{suku nomer ganjil})} = \frac{a}{1-r^2} = 4$$

$$\underbrace{\left(\frac{a}{1-r}\right)}_6 \cdot \left(\frac{1}{1+r}\right) = 4$$

$$\left(\frac{1}{1+r}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$= 3 = 2 + 2r$$

$$r = \frac{1}{2}$$

⇔ substitusikan $r = \frac{1}{2}$ ke pers (1)

$$\frac{a}{1-\frac{1}{2}} = 6 \rightarrow a = 3$$

$$\Leftrightarrow U_1 + U_2 = a + ar$$

$$= 3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

40. Jika suku pertama deret geometri tak hingga adalah a dan jumlahnya 10, maka

- | | |
|-----------------|--------------------------|
| A. $0 < a < 10$ | D. $0 \leq a \leq 20$ |
| B. $0 < a < 18$ | E. $a < 0$ atau $a > 20$ |
| C. $0 < a < 20$ | |

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow S_{\infty} = \frac{a}{1-r} \rightarrow 10 = \frac{a}{1-r}$$

$$10 - 10r = a$$

$$r = \frac{10-a}{10}$$

⇔ Syarat deret geometri tak hingga punya jumlah adalah:

$$-1 < r < 1 \rightarrow -1 < \frac{10-a}{10} < 1$$

$$-10 < 10-a < 10$$

$$-20 < -a < 0$$

$$0 < a < 20$$

41. Seseorang berjalan dengan kecepatan 12 km/jam selama 1 jam pertama. Pada jam kedua kecepatan berkurang menjadi sepertiganya, demikian juga pada jam berikutnya kecepatannya menjadi sepertiga dari sebelumnya. Jarak terjauh yang dapat ditempuh orang itu selama perjalanan adalah
- A. tak terhingga
 - B. 36 km
 - C. 32 km
 - D. 26 km
 - E. 18 km

Jawaban: E

⇔ kecepatan jam pertama = 12 km/jam
kecepatan jam kedua = 4 km/jam
dan seterusnya $\rightarrow a = 12$ dan $r = \frac{1}{3}$

⇔ Jarak terjauh yang dapat ditempuh selama perjalanan adalah:

$$S_{\infty} = \frac{a}{1-r} = \frac{12}{1-\frac{1}{3}} = 18 \text{ km}$$

42. Seekor semut merayap pada suatu koordinat kartesius dimulai dari titik asal (0, 0), kemudian naik 2 unit, terus bergerak 1 unit ke kanan, turun $\frac{1}{2}$ unit, $\frac{1}{4}$ unit ke kiri, $\frac{1}{8}$ unit ke atas, sampai berhenti pada suatu koordinat tertentu. Koordinat tersebut adalah
- A. $(\frac{8}{5}, \frac{4}{5})$
 - B. $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$
 - C. (4, 8)
 - D. (8, 4)
 - E. tidak dapat ditentukan

Jawaban: B

⇔ Pergerakan semut arah sumbu x

$$1 + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{16}\right) + \dots = \frac{1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$$

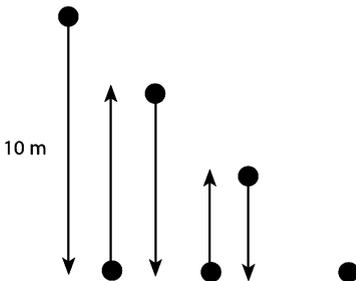
⇔ Pergerakan semut arah sumbu y

$$2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) + \dots = \frac{2}{1+\frac{1}{4}} = \frac{8}{5}$$

⇔ Jadi, posisi semut terakhir adalah $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$

43. Sebuah bola jatuh dari ketinggian 10 m dan memantul kembali dengan ketinggian $\frac{3}{4}$ kali tinggi sebelumnya. Pemantulan ini berlangsung terus menerus hingga bola berhenti. Jumlah seluruh lintasan bola adalah
- A. 60 m
B. 70 m
C. 80 m
D. 90 m
E. 100 m

Jawaban: B



⇔ Jumlah seluruh lintasan sampai berhenti adalah:

$$= 10 + 2 \left\{ \frac{30}{4} + \frac{90}{16} + \dots \right\}$$

$$= 10 + 2 \left(\frac{a}{1-r} \right)$$

$$= 10 + 2 \left(\frac{\frac{30}{4}}{1-\frac{3}{4}} \right)$$

$$= 10 + 2(30) = 70$$

SOLUSI SMART!

⇔ $a = 10 \text{ m}$ dan $r = \frac{3}{4}$

⇔ Jumlah seluruh lintasan sampai berhenti

$$= 2S_{\infty} - a \left(\frac{10}{1-\frac{3}{4}} \right) - 10 = 70 \text{ m}$$

44. Diketahui deret geometri tak hingga $16 + 4 + 1 + \dots$. Jika jumlah deret tersebut dikurangi dengan jumlah n suku pertama, maka hasilnya kurang dari $\frac{1}{3000}$. Nilai n terkecil yang memenuhi adalah
- A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow 16 + 4 + 1 + \dots$$

$$\frac{a}{1-r} - \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} < \frac{1}{3000}$$

$$\frac{16}{1-\frac{1}{4}} - \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{4}} < \frac{1}{3000}$$

$$16 - 16 + 16\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{250}$$

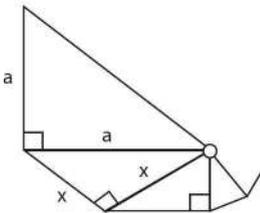
$$\left(\frac{1}{4}\right)^n < \frac{1}{4000}$$

$$n=6 \rightarrow \frac{1}{4096} < \frac{1}{4000}$$

45. Diketahui segitiga siku-siku sama kaki pertama dengan panjang sisi siku-siku a . Dibuat segitiga siku-siku sama kaki ke-2 dengan panjang sisi miring sama dengan panjang sisi siku-siku segitiga pertama. Segitiga siku-siku sama kaki ke-3, ke-4, dan seterusnya masing-masing dibuat dengan panjang sisi miring sama dengan panjang sisi siku-siku segitiga sebelumnya. Jumlah luas seluruh segitiga adalah

- A. $8a^2$
B. $4a^2$
C. $3a^2$
D. $2a^2$
E. a^2

Jawaban: E



⇔ Perhatikan gambar Δ !

$$x^2 + x^2 = a^2 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2} a^2$$

⇔ Luas $\Delta 1 = \frac{1}{2} a^2$

$$\text{Luas } \Delta 2 = \frac{1}{2} x^2 = \frac{1}{4} a^2, \text{ dst.}$$

⇔ Luas seluruh Δ adalah:

$$= \frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{4} a^2 + \dots \rightarrow r = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{1-\frac{1}{2}} = a^2$$

LATIHAN SOAL 16

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Suku ketiga dari suatu barisan aritmetika adalah 10, sedangkan suku kedelapan adalah 25. Suku ke-13 dari barisan itu adalah
A. 40
B. 43
C. 45
D. 55
E. 58
2. Dalam suatu deret aritmetika, jika $U_3 + U_7 = 56$ dan $U_6 + U_{10} = 86$, maka suku ke-2 deret tersebut adalah
A. 8
B. 10
C. 12
D. 13
E. 15
3. Jika u_n adalah suku ke- n deret aritmetika yang memenuhi $u_5 = \frac{1}{4}$ dan $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 = 10$, maka $u_3 = \dots$
A. $\frac{9}{8}$
B. 2
C. $\frac{23}{8}$
D. $\frac{15}{4}$
E. $\frac{19}{4}$

4. Jika $-97, -94, -91, \dots$ adalah barisan aritmetika, maka suku bernilai lebih dari 20 yang muncul pertama kali adalah suku ke
- A. 49
B. 40
C. 41
- D. 42
E. 43
5. Diketahui $a, b,$ dan c berturut-turut adalah suku ke-2, ke-4, dan ke-6 suatu barisan aritmetika. Jika $\frac{a+b+c}{b-1} = 4$, maka nilai b adalah
- A. 4
B. 2
C. -1
- D. -2
E. -4
6. Bilangan $a, b, 2a, (a + b)$ adalah empat suku pertama barisan aritmetika. Jika matriks $A = \begin{pmatrix} a & b \\ a+b & 2a \end{pmatrix}$ memenuhi $\det A = -7$, maka $ab = \dots$
- A. $\frac{3}{2}$
B. 3
C. 4
- D. 6
E. 24
7. Ukuran sisi sebuah segitiga siku-siku membentuk suatu barisan aritmetika. Jika luas segitiga tersebut 54, maka kelilingnya sama dengan
- A. 32
B. 36
C. 40
- D. 44
E. 48
8. U_1, U_2, U_3, \dots adalah barisan aritmetika dengan suku-suku positif. Jika $U_1 + U_2 + U_3 = 24$ dan $(U_1)^2 = U_3 - 10$, maka $U_4 = \dots$
- A. 16
B. 20
C. 24
- D. 30
E. 32

14. Jumlah n suku pertama deret aritmetika dinyatakan dengan $S_n = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n$. Suku ke-10 dari deret aritmetika tersebut adalah
- A. 49
B. $47\frac{1}{2}$
C. 35
D. $33\frac{1}{2}$
E. 29
15. Pada suatu ulangan matematika, terdapat soal mengenai jumlah barisan aritmetika. Pada berkas soal yang diterima Adam, rumus jumlah tidak tercetak sempurna sehingga hanya terbaca $S_n = n^2 + \dots$, tetapi Adam masih bisa menjawab soal tentang nilai beda barisan tersebut. Nilainya adalah
- A. 1
B. -1
C. 2
D. -2
E. 3
16. Seutas tali dipotong 52 bagian yang masing-masing potongan membentuk deret aritmetika. Bila potongan tali terpendek adalah 3 cm dan yang terpanjang adalah 105 cm, maka panjang tali semua adalah
- A. 5.460 cm
B. 2.808 cm
C. 2.730 cm
D. 1.352 cm
E. 808 cm
17. Hasil produksi suatu pabrik setiap tahunnya meningkat mengikuti aturan barisan geometri. Produksi pada tahun pertama sebanyak 200 unit dan pada tahun keempat sebanyak 1.600 unit. Hasil produksi selama enam tahun adalah
- A. 6.200 unit
B. 6.400 unit
C. 12.400 unit
D. 12.600 unit
E. 12.800 unit
18. Jumlah semua bilangan asli antara 1 dan 100 yang habis dibagi 4 tetapi tidak habis dibagi 3 adalah
- A. 432
B. 768
C. 786
D. 1200
E. 1218

19. Keuntungan seorang pedagang bertambah setiap bulan dengan jumlah yang sama. Bila keuntungan sampai bulan keempat 30 ribu rupiah dan sampai bulan kedelapan 172 ribu rupiah, maka keuntungan sampai bulan ke-18 adalah
- A. 1017 ribu rupiah D. 1120 ribu rupiah
 B. 1050 ribu rupiah E. 1137 ribu rupiah
 C. 1100 ribu rupiah
20. $S(x)$ adalah jumlah 49 suku pertama deret aritmetika yang memiliki suku pertama yaitu $\frac{1}{2}x^3$, sedangkan bedanya $(-x + 7)$. Jika $S(x)$ minimum, maka suku ke-10 deret tersebut adalah
- A. -32 D. 59
 B. -4 E. 78
 C. 11
21. Perhatikan barisan $\frac{1}{1}, \frac{1+2x}{1+3}, \frac{1+2x+4x+6x}{1+3+5+7}, \dots$. Jika U_n menyatakan suku ke- n barisan tersebut, dan $V_n = \int U_n dx$, maka $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \dots$
- A. $\frac{1}{2}x^2$ D. 1
 B. x^2 E. $\frac{1}{2}$
 C. x

SOAL LATIHAN - 1

22. Barisan geometri $U_7 = 384$ dan rasio = 2. Suku ke-10 barisan tersebut adalah
- A. 1.920 D. 4.608
 B. 3.072 E. 6.144
 C. 4.052
23. Diketahui deret geometri dengan suku pertama 6 dan suku keempat adalah 48. Jumlah enam suku pertama deret tersebut adalah
- A. 368 D. 379
 B. 369 E. 384
 C. 378

33. Seutas tali dipotong menjadi 9 bagian. Panjang masing–masing potongan tersebut mengikuti barisan geometri. Potongan tali yang paling pendek 4 cm dan potongan tali yang paling panjang 1.024 cm. Panjang tali semula adalah
- A. 512 cm
B. 1.020 cm
C. 1.024 cm
D. 2.032 cm
E. 2.044 cm
34. Pada suatu hari dilakukan pengamatan terhadap virus–virus tertentu yang berkembang dengan membelah diri menjadi dua. Pada awal pengamatan terdapat 2 virus. Pembelahan terjadi setiap 24 jam. Jika setiap 3 hari, seperempat dari virus dibunuh, maka banyaknya virus setelah satu minggu pertama adalah
- A. 24
B. 36
C. 48
D. 64
E. 72
35. Berdasarkan penelitian diketahui bahwa populasi hewan A berkurang menjadi setengahnya tiap 10 tahun. Pada tahun 2000 populasinya tinggal 1 juta. Banyak populasi hewan A pada tahun 1960 sekitar
- A. 64 juta
B. 32 juta
C. 16 juta
D. 8 juta
E. 4 juta
36. Tabungan seseorang pada bulan ke– n selalu dua kali tabungan pada bulan ke– $(n - 1)$, $n \geq 2$. Jika tabungan awalnya Rp 1 juta dan setelah satu tahun menjadi Rp p juta, maka p memenuhi
- A. $1000 < p < 2000$
B. $2000 < p < 3000$
C. $3000 < p < 4000$
D. $4000 < p < 5000$
E. $5000 < p < 6000$

37. Tiga buah bilangan merupakan suku–suku berturut–turut suatu deret aritmetik. Selisih bilangan ketiga dengan bilangan pertama adalah 6. Jika bilangan ketiga ditambah 3, maka ketiga tersebut merupakan deret geometri. Jumlah dari kuadrat bilangan tersebut adalah
- A. 21
B. 35
C. 69
D. 116
E. 126
38. Diketahui 4 buah bilangan. Tiga bilangan pertama membentuk barisan geometri dan tiga bilangan terakhir membentuk barisan aritmetika dengan beda 6. Jika bilangan pertama sama dengan bilangan keempat, maka jumlah keempat bilangan tersebut adalah
- A. 10
B. 12
C. 14
D. 18
E. 24
39. Tiga buah bilangan positif membentuk barisan geometri dengan rasio $r > 1$. Jika suku tengah ditambah 4, maka terbentuk sebuah barisan aritmetika yang jumlahnya 30. Hasil kali ketiga bilangan ini adalah
- A. 64
B. 125
C. 216
D. 343
E. 1000
40. Jika di antara suku pertama dan suku kedua suatu barisan geometri disisipkan 4 bilangan, maka dapat diperoleh barisan aritmetika dengan beda 2 dan jika suku ke 3 barisan geometri tersebut adalah 40, maka rasio barisan geometri tersebut adalah
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{3}{2}$
C. 2
D. $\frac{5}{2}$
E. 3

46. Jumlah suatu deret geometri tak hingga adalah 6 dan jumlah dari suku-suku yang bernomor ganjil adalah 4. Suku ke-6 deret tersebut adalah

A. $\frac{1}{32}$

D. $\frac{4}{32}$

B. $\frac{2}{32}$

E. $\frac{6}{32}$

C. $\frac{3}{32}$

47. Jumlah tak hingga suatu deret geometri adalah 8, dan jumlah semua suku pada kedudukan (urutan) genap adalah $\frac{8}{3}$. Suku kelima deret tersebut adalah

A. 2

D. $\frac{1}{3}$

B. 1

E. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{2}$

48. Jumlah deret tak hingga $1 - \sin^2 \frac{1}{3}\pi + \sin^4 \frac{1}{3}\pi - \sin^6 \frac{1}{3}\pi + \dots$ adalah

A. $\frac{4}{7}$

D. $3\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

E. 4

C. 2

49. Sebuah bola dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 4 m dan memantul kembali dengan tinggi $\frac{3}{4}$ dari ketinggian semula. Panjang lintasan seluruhnya sampai bola berhenti adalah

A. 12 m

D. 28 m

B. 16 m

E. 32 m

C. 24 m

50. Sebuah bola pingpong dijatuhkan ke lantai dari ketinggian 2 meter. Setiap kali setelah bola itu memantul ia mencapai ketinggian tiga perempat dari ketinggian yang dicapai sebelumnya. Panjang lintasan bola tersebut dari pantulan ke-3 sampai berhenti adalah

A. 3,38 meter

D. 6,75 meter

B. 3,75 meter

E. 7,75 meter

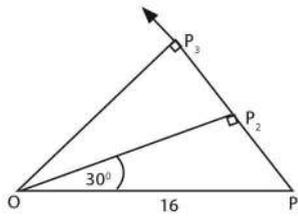
C. 4,25 meter

51. Diberikan lingkaran L_1 dengan jari-jari R dalam L_1 dibuat bujur sangkar B_1 dengan keempat titik sudutnya terletak pada busur L_1 . Dalam B_1 dibuat pula lingkaran L_2 yang menyinggung keempat sisi bujur sangkar tersebut. Dalam L_2 dibuat pula lingkaran B_2 dengan keempat titik sudutnya terletak pada busur L_2 . Demikian seterusnya sehingga diperoleh lingkaran-lingkaran L_1, L_2, L_3, \dots dan bujur sangkar-bujur sangkar B_1, B_2, B_3, \dots . Jumlah luas seluruh lingkaran dan seluruh bujur sangkar adalah

- A. $2(\pi + 2)R^2$
B. $(\pi + 2)R^2 \sqrt{2}$
C. $(\pi + 2)R^2$
D. $(\pi + \sqrt{2})R^2$
E. $(\pi + \sqrt{2})R^2 \sqrt{2}$

52. Diketahui sebuah segitiga OP_1P_2 dengan sudut siku-siku pada P_2 dan sudut puncak 30° pada O . Dengan OP_2 sebagai sisi miring dibuat pula segitiga siku-siku OP_2P_3 dengan sudut puncak P_2OP_3 sebesar 30° . Selanjutnya dibuat pula segitiga siku-siku OP_3P_4 dengan OP_3 sebagai sisi miring dan sudut puncak P_3OP_4 sebesar 30° . Proses ini dilanjutkan terus menerus. Jika $OP_1 = 16$, maka jumlah luas seluruh segitiga adalah

- A. $64 \sqrt{3}$
B. 128
C. $128 \sqrt{3}$
D. 256
E. $256 \sqrt{3}$



53. Deret geometri $1 + {}^3 \log(x-5) + {}^3 \log^2(x-5) + \dots$ konvergen jika

- A. $0 < x < 5$
B. $5 < x < 8$
C. $5 \frac{1}{3} \leq x \leq 8$
D. $0 \leq x \leq 8$
E. $5 \frac{1}{3} < x < 8$

54. Jika r rasio (pembanding) suatu deret geometri tak hingga yang konvergen dan S jumlah deret geometri tak hingga

$$\frac{1}{3+r} + \frac{1}{(3+r)^2} + \frac{1}{(3+r)^3} + \dots, \text{ maka } \dots$$

- A. $\frac{1}{4} < S < \frac{1}{2}$
B. $\frac{3}{8} < S < \frac{3}{4}$
C. $\frac{1}{3} < S < 1$
D. $\frac{3}{4} < S < \frac{4}{3}$
E. $\frac{1}{5} < S < \frac{4}{5}$

55. Agar jumlah deret ${}^{64}\log(x-2) + {}^{64}\log^2(x-2) + {}^{64}\log^3(x-2) + \dots$ terletak antara 1 dan 2, maka haruslah

- A. $\frac{129}{64} < x < 66$
B. $\frac{129}{64} < x < 18$
C. $\frac{129}{64} < x < 10$
D. $0 < x < 66$
E. $10 < x < 18$



BANGUN RUANG

17

A. PENDAHULUAN

a. Kedudukan Garis Terhadap Bidang

1. Garis pada bidang

Syarat garis l pada bidang v adalah garis l harus memiliki lebih dari satu titik persekutuan dengan bidang v .

2. Garis sejajar bidang

- Syarat garis l sejajar bidang v adalah minimal ada satu garis pada bidang v sejajar garis l .
- Bila garis l sejajar bidang v , maka tidak semua garis pada bidang v sejajar garis l .

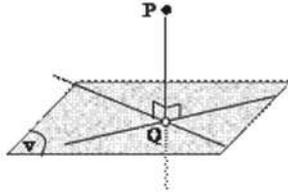
3. Garis tegak lurus bidang

- Syarat garis l tegak lurus bidang v adalah minimal ada dua garis pada bidang v tegak lurus garis l .
- Bila garis l tegak lurus bidang v , maka semua garis pada bidang v tegak lurus garis l .

h. Proyeksi Titik dan Garis Pada Bidang

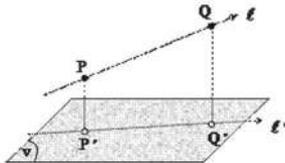
1. Menentukan proyeksi titik P pada bidang v

Tarik garis dari titik P yang tegak lurus bidang v



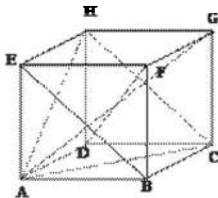
2. Menentukan proyeksi garis ℓ pada bidang v

- Tentukan dua titik P dan Q pada grs ℓ
- Proyeksikan titik P dan titik Q pada bidang v
- Hubungkan P' dan Q' atau garis ℓ' sebagai hasil proyeksi garis ℓ pada bidang v



CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Diketahui kubus ABCD EFGH.



- (1) AH dan BE berpotongan
- (2) AD adalah proyeksi AH pada bidang ABCD
- (3) DF tegak lurus bidang ACH
- (4) AG dan DF bersilangan

Dari pernyataan di atas, yang benar adalah nomor

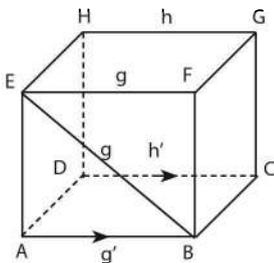
- A. (1) dan (2) saja
- B. (2) dan (3) saja
- C. (3) dan (4) saja
- D. (1) dan (3) saja
- E. (2) dan (4) saja

Jawaban: B

- ⇔ Dari gambar terlihat bahwa:
 - AH dan BE bersilangan
 - AG dan DF berpotongan
 - AD adalah proyeksi AH pada bidang ABCD
 - DF tegak lurus bidang ACH
- ⇔ Pernyataan yang benar adalah nomor (2) dan (3).

2. Proyeksi garis g dan h pada suatu bidang B , berturut-turut adalah g' dan h' . Jika $g' // h'$ maka kedua garis g dan h
- A. pasti sejajar
 - B. mungkin bersilangan
 - C. pasti tidak sejajar
 - D. mungkin berpotongan
 - E. pasti bersilangan

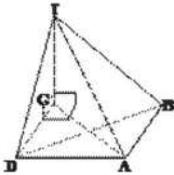
Jawaban: B



- ⇔ Perhatikan gambar di atas!
 Misal: garis h = garis HG
 garis g = garis EF dan garis EB
- ⇔ garis h' adalah hasil proyeksi garis h
- garis g' adalah hasil proyeksi garis g
- ⇔ garis g dan garis h bisa sejajar juga bisa bersilangan

3. Diketahui limas T.ABCD dengan ABCD bujur sangkar. Jika $TC \perp ABCD$, maka:
- | | |
|-------------------|-------------------|
| (1) $TD \perp BC$ | (3) $TB \perp CD$ |
| (2) $TA \perp BD$ | (4) $TB \perp AD$ |
- Pernyataan yang benar adalah
- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| A. (1), (2), dan (3) benar | D. (4) |
| B. (1) dan (3) | E. (1), (2), (3), dan (4) |
| C. (2) dan (4) | |

Jawaban: A



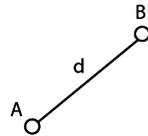
- ⇔ Jika garis $g \perp$ bidang α , maka garis $g \perp$ semua garis pada bidang α .
- (1) $BC \perp TCD \perp BC \perp TD$
 - (2) $BD \perp TAC \perp BD \perp TA$
 - (3) $CD \perp TBC \perp CD \perp TB$

B. JARAK

a. Jarak Titik Ke Titik

Langkah menentukan jarak D. titik A ke titik B:

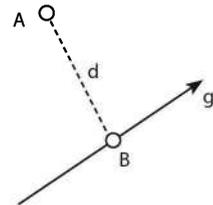
1. Hubungkan titik A ke titik B
2. Jarak titik A ke titik B adalah AB.



h. Jarak Titik Ke Garis

Langkah menentukan jarak D. titik A ke garis g:

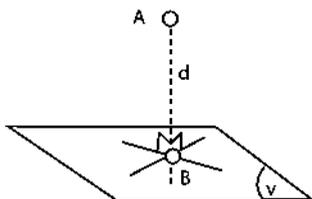
1. Proyeksikan titik A pada garis g (titik B adalah hasil proyeksi titik A pada garis g)
2. Jarak titik A ke garis g adalah AB.



c. Jarak Titik Ke Bidang

Langkah menentukan jarak D. titik A ke bidang v :

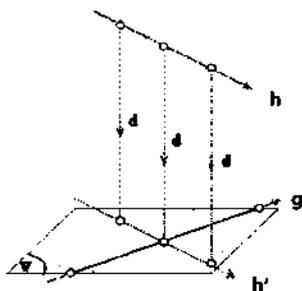
1. Proyeksikan titik A pada bidang v (titik B adalah hasil proyeksi titik A pada bidang v)
2. Jarak titik A ke bidang v adalah AB.



d. Jarak Dua Garis Bersilangan

Langkah menentukan jarak D. garis g ke garis h (g dan h bersilangan):

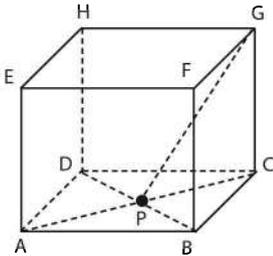
1. Buat bidang melalui salah satu garis dan sejajar garis lainnya (misal bidang v melalui garis g sejajar garis h)
2. Proyeksikan garis h pada bidang v . (menghasilkan garis h')
3. Jarak garis g ke garis h adalah sama dengan jarak garis h ke garis h' .



CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

4. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH pada gambar adalah 8 cm. Jarak titik G dan P adalah
- | | |
|-----------------------------|-------------------|
| A. $\frac{4}{3}\sqrt{6}$ cm | D. $4\sqrt{3}$ cm |
| B. $4\sqrt{2}$ cm | E. $4\sqrt{6}$ cm |
| C. $\frac{8}{3}\sqrt{6}$ cm | |

Jawaban: E



⇔ Panjang $AC = 8\sqrt{2}$

$$PC = \frac{1}{2}(AC) = \frac{1}{2}(8\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$$

⇔ Perhatikan $\triangle PCG$ siku-siku di C!

$$PG = \sqrt{(PC)^2 + (CG)^2}$$

$$= \sqrt{(4\sqrt{2})^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{32 + 64}$$

$$= \sqrt{96} = \sqrt{(16)(6)} = 4\sqrt{6}$$

5. Tinggi limas beraturan T.ABCD di samping sama dengan

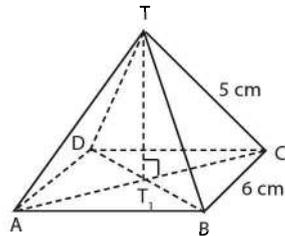
A. $\sqrt{7}$ cm

B. 3 cm

C. $\sqrt{13}$ cm

D. 4 cm

E. $3\sqrt{2}$ cm



Jawaban: A

⇔ Pada gambar di atas panjang $T_1C = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}(6\sqrt{2}) = 3\sqrt{2}$

⇔ Perhatikan $\triangle TT_1C$ siku-siku di T_1

$$TT_1 = \sqrt{(TC)^2 - (T_1C)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 - (3\sqrt{2})^2}$$

$$= \sqrt{25 - 18} = \sqrt{7}$$

⇔ Tinggi limas = $TT_1 = \sqrt{7}$ cm

6. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a. Jika titik P terletak pada perpanjangan AB sehingga $PB = 2a$ dan titik Q pada perpanjangan FG sehingga $QG = a$, maka $PQ = \dots$

A. $a\sqrt{5}$

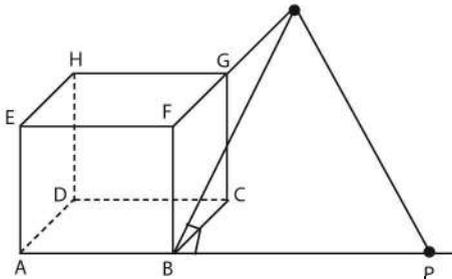
D. $3a$

B. $2a\sqrt{2}$

E. $a\sqrt{7}$

C. $4a$

Jawaban: D



$$\Leftrightarrow PB \perp \text{bidang BCGF} \rightarrow BQ \perp PB$$

$$\Leftrightarrow BQ = \sqrt{(FB)^2 + (FQ)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + (2a)^2} = a\sqrt{5}$$

$$PQ = \sqrt{(BQ)^2 + (PB)^2}$$

$$= \sqrt{(a\sqrt{5})^2 + (2a)^2} = 3a$$

7. Panjang setiap rusuk bidang empat beraturan T.ABC sama dengan 16 cm. Jika P pertengahan TA dan Q pertengahan BC, maka PQ sama dengan

A. $8\sqrt{2}$ cm

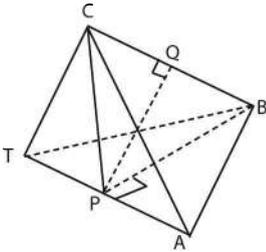
D. $12\sqrt{2}$ cm

B. $8\sqrt{3}$ cm

E. $12\sqrt{3}$ cm

C. $8\sqrt{6}$ cm

Jawaban: A



$$\begin{aligned}\Leftrightarrow PB &= \sqrt{(AB)^2 - (PA)^2} \\ &= \sqrt{(16)^2 - (8)^2} = 8\sqrt{3}\end{aligned}$$

$\triangle BPC$ siku-siku sama kaki sehingga $BP = CP$.

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow PQ &= \sqrt{(PB)^2 - (BQ)^2} \\ &= \sqrt{(8\sqrt{3})^2 - (8)^2} \\ &= 8\sqrt{2}\end{aligned}$$

8. Diketahui kubus ABCD EFGH, rusuk-rusuknya 10 cm. Jarak titik F ke garis AC adalah

A. $3\sqrt{6}$

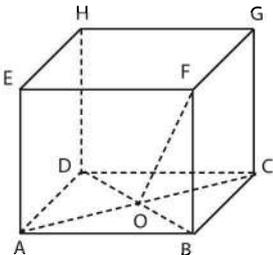
D. $10\sqrt{2}$

B. $5\sqrt{2}$

E. $10\sqrt{6}$

C. $5\sqrt{6}$

Jawaban: C



$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \text{Pada gambar di atas panjang} \\ BO &= \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} (10\sqrt{2}) = 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

⇔ Perhatikan $\triangle BFO$ siku-siku di B!

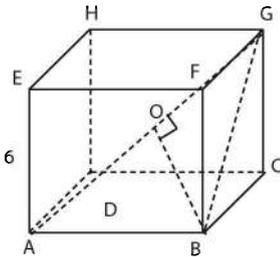
$$\begin{aligned} OF &= \sqrt{(OB)^2 + (BF)^2} \\ &= \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (10)^2} \\ &= \sqrt{50 + 100} \\ &= \sqrt{150} = \sqrt{(25)(6)} = 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

⇔ Jarak F ke AC = OF = $5\sqrt{6}$

9. Pada kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 6 cm, jarak titik B ke diagonal ruang AG adalah

- | | |
|-------------------|-------------------|
| A. $\sqrt{5}$ cm | D. $2\sqrt{6}$ cm |
| B. $2\sqrt{5}$ cm | E. $3\sqrt{6}$ cm |
| C. $3\sqrt{5}$ cm | |

Jawaban: D



⇔ $AG = \text{Diagonal ruang} = a\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$
 $BG = \text{diagonal bidang} = a\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

⇔ Perhatikan $\triangle ABG$

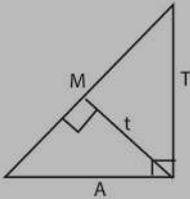
Luas $\triangle ABG$

$$\begin{aligned} &\swarrow \quad \searrow \\ \frac{(AG) \cdot (BO)}{2} &= \frac{(AB) \cdot (BG)}{2} \\ BO &= \frac{(AB) \cdot (BG)}{(AG)} \end{aligned}$$

$$BO = \frac{(6) \cdot (6\sqrt{2})}{(6\sqrt{3})}$$

$$BO = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$$

SOLUSI SMART!



Pada Δ siku-siku ABC berlaku: $t = \frac{(A)(T)}{(M)}$

⇔ Jarak G ke garis BH pada kubus di atas adalah

$$OB = \frac{AB \cdot BG}{AG} = \frac{(6)(6\sqrt{2})}{(6\sqrt{3})} = 2\sqrt{6}$$

JARAK TITIK KE BIDANG

10. Panjang rusuk sebuah kubus ABCD.EFGH adalah s cm. Jarak titik A ke bidang BED adalah

A. $2s\sqrt{3}$

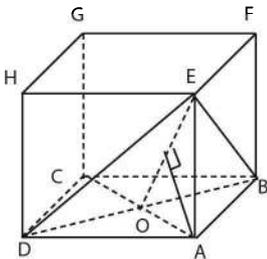
D. $\frac{1}{2}s\sqrt{3}$

B. $3s\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{3}s\sqrt{3}$

C. $3s\sqrt{s}$

Jawaban: E



$$\Leftrightarrow AC = s\sqrt{2}$$

$$AO = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}s\sqrt{2}$$

$$EO = \sqrt{(AO)^2 + (AE)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{s}{2}\sqrt{2}\right)^2 + (s)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{2s^2}{4} + \frac{4s^2}{4}} = \frac{1}{2}s\sqrt{6}$$

\Leftrightarrow Perhatikan $\triangle AEO!$

$$x = \frac{(A)(T)}{M} = \frac{(AO)(AE)}{(EO)} = \frac{\left(\frac{1}{2}s\sqrt{2}\right)(s)}{\frac{1}{2}s\sqrt{6}} = \frac{s}{3}\sqrt{3}$$

\Leftrightarrow Jarak A ke bidang BED adalah $HO = \frac{s}{3}\sqrt{3}$

SOLUSI SMART!

Pada kubus ABCD.EFGH selalu berlaku:

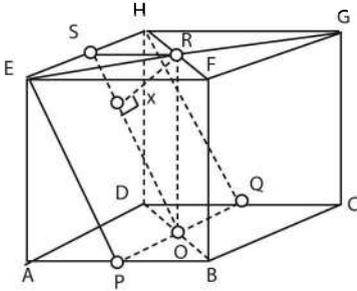
- Jarak titik A ke bidang BED dan sejenisnya $= \frac{1}{3}$ diagonal ruang $= \frac{a}{3}\sqrt{3}$
- Jarak titik G ke bidang BED dan sejenisnya $= \frac{2}{3}$ diagonal ruang $= \frac{2a}{3}\sqrt{3}$

\Leftrightarrow Jadi, jarak titik A ke bidang BED pada kubus dengan rusuk s adalah $\frac{s}{3}\sqrt{3}$.

11. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a . P dan Q masing-masing merupakan titik tengah AB dan CD, sedangkan R merupakan titik perpotongan EG dan FH. Jarak titik R ke bidang EPQH adalah

- | | |
|------------------|--------------------------|
| A. $\frac{a}{5}$ | D. $\frac{a}{5}\sqrt{5}$ |
| B. $\frac{a}{3}$ | E. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ |
| C. $\frac{a}{2}$ | |

Jawaban: D



⇔ Perhatikan $\triangle SRO$!

$$SR = \frac{1}{2}a, RO = a$$

$$SO = \sqrt{(SR)^2 + (RO)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + a^2}$$

$$= \frac{1}{2}a\sqrt{5}$$

$$x = \frac{SR \cdot RO}{SO}$$

$$= \frac{(\frac{1}{2}a)(a)}{\frac{1}{2}a\sqrt{5}} = \frac{1}{5}a\sqrt{5}$$

12. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk a cm. Jika S merupakan proyeksi titik C pada bidang AFH , maka jarak titik A ke titik S adalah

A. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ cm

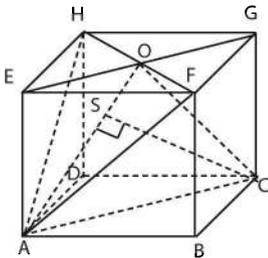
D. $a\sqrt{2}$ cm

B. $\frac{1}{3}a\sqrt{6}$ cm

E. $a\sqrt{3}$ cm

C. $\frac{2}{3}a\sqrt{6}$ cm

Jawaban: B



- Jika rusuk kubus $a \rightarrow AC = a\sqrt{2}$
- Jarak C ke bidang AFH = $CS = \frac{2}{3}a\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow AS = \sqrt{(AC)^2 - (CS)^2}$$

$$= \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - (\frac{2}{3}a\sqrt{3})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{6}{9}a^2} = \frac{1}{3}a\sqrt{6}$$

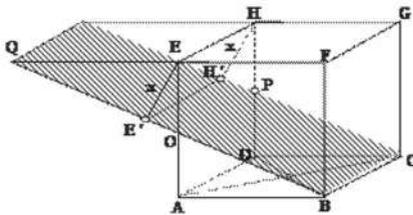
13. Rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 10 cm. Jika P adalah titik tengah DH, maka jarak garis CP dan garis EH adalah

- | | |
|-----------------------------|-------------------|
| A. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ cm | D. $\sqrt{5}$ cm |
| B. $2\sqrt{6}$ cm | E. $2\sqrt{5}$ cm |
| C. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ cm | |

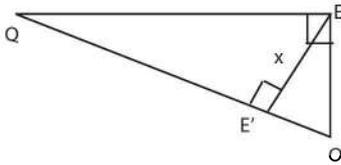
Jawaban: D

\Leftrightarrow Langkah-langkahnya:

- Buat bidang melalui garis CP sejajar garis EH yaitu bidang BCPO.
- Proyeksikan garis EH ke bidang BCPO (jatuh di perpanjangan bidang BCPO) yaitu garis $E'H'$.
- Jarak garis CP ke garis EH sama dengan jarak EH ke $E'H' = x$

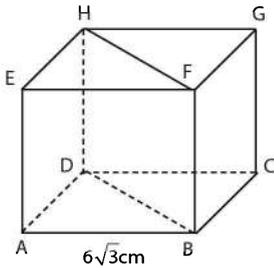


⇔ Perhatikan $\triangle EOQ$ siku-siku di E!



$$\begin{aligned} OQ &= \sqrt{(DE)^2 + (EO)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}a^2} = \frac{a}{2}\sqrt{5}\text{cm} \\ x &= \frac{(EQ) \cdot (EO)}{(OQ)} = \frac{a \cdot \left(\frac{1}{2}a\right)}{\left(\frac{1}{2}a\sqrt{5}\right)} = \frac{a}{5}\sqrt{5}\text{cm} \end{aligned}$$

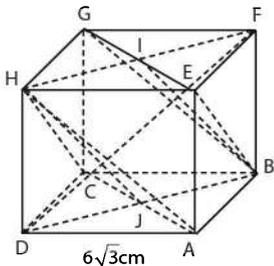
14. Perhatikan gambar kubus ABCD.EFGH berikut!

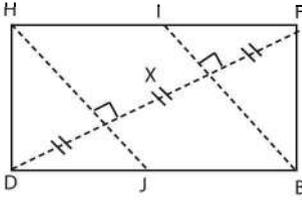


Jarak bidang ACH dan EGB adalah

- A. $4\sqrt{3}$ cm
- B. $2\sqrt{3}$ cm
- C. 4 cm
- D. 6 cm
- E. 12 cm

Jawaban: D





\Leftrightarrow Panjang DF = diagonal ruang
 $= a\sqrt{3}$ cm
 $= 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$ cm
 $= 18$ cm

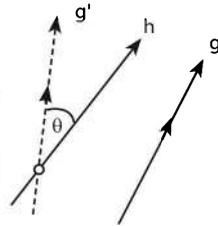
\Leftrightarrow Jarak bidang ACH dan EGB adalah
 $x = \frac{1}{3} DF = 6$ cm

C. SUDUT

a. Sudut Antara Garis dan Garis

Langkah menentukan sudut (θ) antara garis g dan garis h:

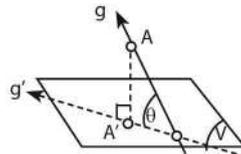
1. Geser salah satu garis (misal garis h) memotong garis yang lainnya (garis g).
2. Sudut antara garis h dan garis g adalah sudut antara garis h' dengan garis g.



b. Sudut Antara Garis dan Bidang

Langkah menentukan sudut (θ) antara garis g dan bidang α :

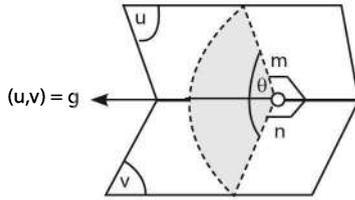
1. Proyeksikan garis g pada bidang v (garis g').
2. Sudut antara garis g dan bidang v adalah sudut antara garis g dan garis g'.



c. Sudut Antara Bidang dan Bidang

Langkah mencari sudut antara bidang u dan bidang v :

1. Tentukan garis potong (garis g) antara bidang u dan bidang v .
2. Buat garis dari masing-masing bidang u dan bidang v (garis m dan garis n) yang tegak lurus garis g dan pertemukan dalam satu titik.
3. θ adalah sudut antara bidang u dan bidang v .



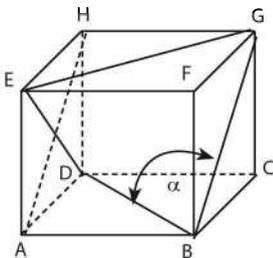
CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

SUDUT ANTARA DUA GARIS LURUS

15. Jika BE dan AH masing-masing adalah diagonal bidang sisi $ABFE$ dan $ADHE$ kubus $ABCD-EFGH$, maka besar sudut antara BE dan AH adalah

- | | |
|---------------|----------------|
| A. 30° | D. 90° |
| B. 45° | E. 180° |
| C. 60° | |

Jawaban: C



⇔ Geser garis AH ke BG dan memotong BE di B , sehingga sudut antara BE dengan AH sama dengan sudut antara BE dengan BG
 $= \alpha = 60^\circ \rightarrow \triangle BEG = \triangle$ sama sisi

16. Diketahui bidang empat beraturan ABCD dengan panjang rusuk 8 cm. Jika titik O adalah titik tengah AB, maka kosinus sudut antara bidang garis DO dan CO adalah

- A. $\frac{1}{3}$
- B. $\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- D. $\frac{2}{3}$
- E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow CO = DO = \sqrt{(CA)^2 - (AO)^2}$$

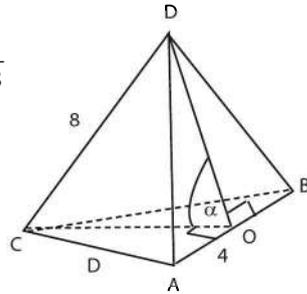
$$= \sqrt{(8)^2 - (4)^2} = \sqrt{48} = 3\sqrt{3}$$

\Leftrightarrow Sudut antara DO dan CO adalah α .

\Leftrightarrow Perhatikan $\triangle COD$!

$$\cos \alpha = \frac{(CO)^2 + (DO)^2 - (CD)^2}{2 \cdot (CO) \cdot (DO)}$$

$$= \frac{(48) + (48) - (64)}{2 \cdot (4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3})} = \frac{1}{3}$$

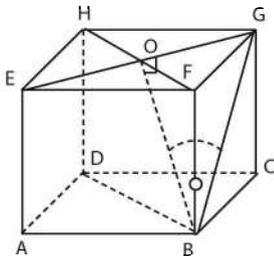


SUDUT ANTARA GARIS DAN BIDANG

17. Diketahui sebuah kubus ABCD.EFGH. Besar sudut yang dibentuk oleh garis BG dengan bidang BDHF adalah

- A. 90°
- B. 60°
- C. 45°
- D. 30°
- E. 15°

Jawaban: D



⇨ Jika rusuk kubus = a cm, maka:

$$BG = a\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$GO = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \text{ cm}$$

⇨ Perhatikan $\triangle BGO$

$$\sin \theta = \frac{GO}{BG} = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = 30^\circ.$$

SOLUSI SMART!

$\triangle BEG$ adalah segitiga sama sisi, sehingga:

$$\angle EBG = \angle BGE = \angle BEG = 60^\circ.$$

$$\angle (BG, BDHF) = \theta = \frac{1}{2} \angle EBG = 30^\circ.$$

SUDUT ANTARA DUA BIDANG

18. Diketahui kubus ABCD.EFGH. Jika θ adalah sudut antara bidang AFH dan EFH, maka nilai $\sin \theta$ adalah

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

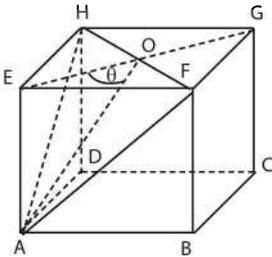
D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

Jawaban: E



⇨ misal rusuk kubus = 2

$$\Leftrightarrow EO = \frac{1}{2}EG = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} AO &= \sqrt{(AE)^2 + (EO)^2} \\ &= \sqrt{4 + 2} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin \theta = \frac{AE}{AO} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{3}{1} \sqrt{6}$$

19. Diketahui limas segi empat T.ABCD dengan rusuk-rusuk tegak 15 cm, bidang alasnya ABCD berbentuk persegi panjang dengan AB = 10 cm dan BC = 12 cm. Jika α adalah sudut antara bidang TAB dengan bidang alas ABCD, maka $\sin \alpha = \dots$

A. $\frac{2}{5} \sqrt{19}$ cm

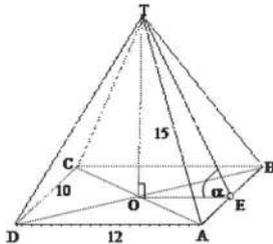
D. $\frac{1}{10} \sqrt{82}$ cm

B. $\frac{1}{16} \sqrt{78}$ cm

E. $\frac{2}{5} \sqrt{21}$ cm

C. $\frac{4}{5} \sqrt{5}$ cm

Jawaban: D



\Leftrightarrow Sudut antara bidang TAB dan bidang ABCD adalah α .

\Leftrightarrow Perhatikan $\triangle TOE$!

$$\begin{aligned} TE &= \sqrt{(TA)^2 - (AE)^2} \\ &= \sqrt{(15)^2 - (5)^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow TO &= \sqrt{(TE)^2 - (OE)^2} \\ &= \sqrt{(10\sqrt{2})^2 - (6)^2} \\ &= \sqrt{164} = 2\sqrt{41} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{TO}{TE} = \frac{2\sqrt{41}}{10\sqrt{2}} = \frac{1}{10} \sqrt{82}$$

20. ABCD.EFGH adalah sebuah balok siku–siku dengan alas yang berbentuk bujur sangkar. AB = 4 cm, AE = 8 cm dan α adalah sudut antara bidang ACH dan bidang ABCD. $\sin 2\alpha = \dots$

A. $\frac{4}{5}\sqrt{2}$

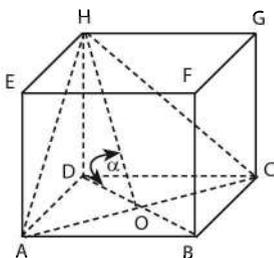
D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{2}$

E. $\frac{4}{9}\sqrt{2}$

C. $\frac{4}{7}\sqrt{2}$

Jawaban: E



- $AC = \sqrt{(AB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

$$HC = \sqrt{(HG)^2 + (GC)^2} = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$$

$$HO = \sqrt{(HD)^2 + (OD)^2} = \sqrt{64 + 8} = 6\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$= 2 \cdot \frac{HD}{HO} \cdot \frac{DO}{HO}$$

$$= 2 \cdot \frac{8}{6\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} = \frac{4}{9}\sqrt{2}$$

21. Bidang alas limas T.ABCD berbentuk bujur sangkar dengan sisi 4 cm. Jika bidang TAB tegak lurus bidang alas ABCD. ΔTAB sama kaki dan tinggi limasnya $2\sqrt{5}$, maka sudut antara TD dengan bidang alas adalah

A. 30°

D. 75°

B. 45°

E. $57,5^\circ$

C. 60°

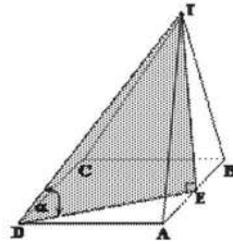
Jawaban: B

- \Leftrightarrow $TAB \perp ABCD$ dan E titik tengah AB
 $TE \perp ABCD$
 $TE \perp DE$

$$\Leftrightarrow DE = \sqrt{(AD)^2 + (AE)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{TE}{DE} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \rightarrow \alpha = 45^\circ$$



D. BIDANG IRISAN

Langkah melukis penampang bidang irisan sebagai berikut.

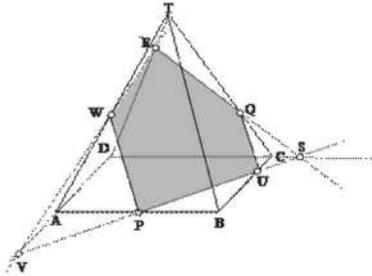
- Perhatikan adanya 2 titik yang terletak pada satu bidang sisi benda.
 - Hubungkan kedua titik tersebut menjadi irisan pada bidang sisi tersebut
 - Lukis irisan ini sampai ke tepi bidang sisi
- Jika tidak terdapat 2 titik yang sebidang, maka irisan–irisan yang ada dapat diperpanjang sampai memotong tepi–tepi dasar bidang sisi. Titik–titik ini berlaku sebagai titik baru dari suatu penampang.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 4

22. Diketahui limas segi empat beraturan T.ABCD. Titik P pada pertengahan AB, Q pada TC, sehingga $TQ : QC = 2 : 1$, dan R pada TD sehingga $TR : RD = 1 : 3$. Irisan bidang yang melalui P, Q dan R dengan limas berbentuk
- | | |
|--------------|--------------|
| A. segitiga | D. trapesium |
| B. segiempat | E. segienam |
| C. segilima | |

Jawaban: C

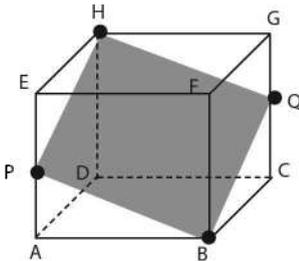
- ⇔ Langkah – langkah melukis bidang:
- Hubungkan RQ dan memotong DC di S
 - Hubungkan PS sampai memotong BC dan DA pada bidang alas di U dan V
 - Hubungkan VR dan memotong TA di W
- ⇔ Bidang yang melalui titik–titik P, Q dan R adalah PUQRW



23. ABCD.EFGH sebuah kubus dengan rusuk a . P adalah titik tengah AE. Luas irisan bidang datar yang melalui B, H dan P dengan kubus adalah

- | | |
|-----------------------------|----------------------|
| A. $2a^2\sqrt{2}$ | D. $(1+\sqrt{2})a^2$ |
| B. $a^2\sqrt{6}$ | E. $(1+\sqrt{3})a^2$ |
| C. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{6}$ | |

Jawaban: B



⇔ Irisan bidang datar yang dimaksud adalah PBQH

- $HB = \text{Diagonal ruang} = a\sqrt{3}$
- $PQ = \text{Diagonal bidang} = a\sqrt{2}$

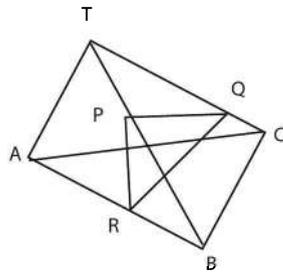
⇔ Luas bidang PBQH = $(PQ)(BH)$

$$= (a\sqrt{2})(a\sqrt{3})$$

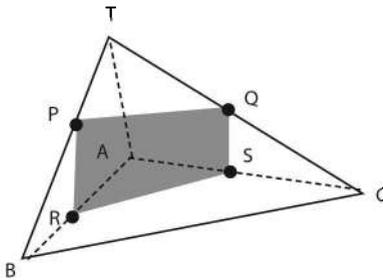
$$= a^2\sqrt{6}$$

24. Rusuk TA dari bidang empat T.ABC tegak lurus pada alas. TA dan BC masing-masing 8 cm dan 6 cm. Jika P titik tengah TB, Q titik tengah TC dan R titik tengah AB, dan bidang yang melalui ketiga titik P, Q dan R memotong rusuk AC di S, maka luas PQRS adalah

- 24 cm^2
- 20 cm^2
- 18 cm^2
- 16 cm^2
- 12 cm^2



Jawaban: E



⇔ $PR = QS = \frac{1}{2} TA = 4$

$RS = PQ = \frac{1}{2} BC = 3$

⇔ Luas bidang (persegi panjang) yang dimaksud = $PR.RS = 12 \text{ cm}^2$

LATIHAN SOAL 17

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. a dan b adalah dua buah garis bersilang. Titik–titik P, Q, R terletak pada a dan titik–titik K, L, M terletak pada b . Bidang yang melalui P, Q dan K dan bidang yang melalui R, L , dan M adalah
 - A. berimpit
 - B. sejajar
 - C. berpotongan sepanjang QL
 - D. berpotongan sepanjang PM
 - E. berpotongan sepanjang RK
2. Garis g tegak lurus pada bidang V dan bidang W membentuk sudut lancip dengan bidang V . Jika W memotong V menurut suatu garis s , maka proyeksi g pada W
 - A. tegak lurus pada V
 - B. tegak lurus pada s
 - C. bersilang tegak lurus dengan g
 - D. sejajar dengan V
 - E. sejajar dengan s

3. Diketahui titik P di luar garis g. Melalui P dapat dibuat hanya satu bidang yaitu:
- (1) sejajar dengan g
 - (2) tegak lurus pada g
 - (3) membuat sudut 45° dengan g
 - (4) melalui g
- Pernyataan yang benar adalah
- | | |
|----------------------------|---------------------------|
| A. (1), (2), dan (3) benar | D. (4) |
| B. (1) dan (3) | E. (1), (2), (3), dan (4) |
| C. (2) dan (4) | |
4. Garis g dan garis h bersilangan, bidang V melalui garis g dan sejajar garis h. Bidang W melalui garis h dan berpotongan dengan bidang V sepanjang garis k, maka
- | | |
|---------------------------|---------------------------|
| A. k dan h bersilangan | D. k sejajar g memotong h |
| B. k memotong g dan h | E. k berimpit dengan g |
| C. k sejajar h memotong g | |
5. Garis a tegak lurus pada bidang A dan garis b tegak lurus pada bidang B. Jika c adalah garis potong A dan B, maka
- | | |
|-------------------------------|-------------------------|
| A. a tegak lurus pada b | D. a tegak lurus pada B |
| B. b tegak lurus pada A | E. a dan b berpotongan |
| C. c tegak lurus pada a dan b | |

SOAL LATIHAN - 2

6. Alas bidang-4 D.ABC berbentuk segitiga siku-siku sama kaki dengan $\angle BAC = 90^\circ$. Proyeksi D pada $\triangle ABC$ adalah titik E, yang merupakan titik tengah BC. Jika $AB = AC = p$ dan $DE = 2p$, maka $AD = \dots$
- | | |
|-----------------------------|-----------------|
| A. $3p$ | D. $\sqrt{5} p$ |
| B. $1\frac{1}{2}\sqrt{2} p$ | E. $\sqrt{3} p$ |
| C. $1\frac{1}{2}\sqrt{3} p$ | |

7. Diketahui bidang empat beraturan D.ABC. Panjang setiap rusuknya a cm. Jarak antara setiap rusuk yang bersilangan sama dengan
- A. $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ cm
 B. $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ cm
 C. $\frac{a}{3}\sqrt{3}$ cm
 D. $\frac{a}{3}\sqrt{2}$ cm
 E. $\frac{a}{4}\sqrt{3}$ cm
8. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 8 cm. Titik M adalah titik tengah BC. Jarak M ke EG adalah
- A. 6 cm
 B. $6\sqrt{2}$ cm
 C. $6\sqrt{3}$ cm
 D. $4\sqrt{6}$ cm
 E. 12 cm
9. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah a . Jarak E ke diagonal BH adalah
- A. $\frac{a}{2}\sqrt{6}$
 B. $\frac{a}{3}\sqrt{6}$
 C. $\frac{a}{4}\sqrt{6}$
 D. $\frac{a}{5}\sqrt{6}$
 E. $\frac{a}{2}\sqrt{6}$
10. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk $2\sqrt{3}$. Jika titik P terletak pada BC dan titik Q terletak pada FG dengan $BP = FQ = 2$, maka jarak titik H ke bidang APQE adalah
- A. $\sqrt{3}$
 B. 3
 C. 4
 D. $2\sqrt{5}$
 E. $2\sqrt{7}$
11. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk a . P adalah titik pada perpanjangan AE sehingga $PE = \frac{1}{2}a$. Jika bidang PBD memotong bidang atas EFGH sepanjang QR, maka $QR = \dots$
- A. $\frac{1}{3}a$
 B. $\frac{1}{2}a$
 C. $\frac{1}{3}a\sqrt{2}$
 D. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$
 E. $\frac{2}{3}a\sqrt{2}$

12. Jika panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6, maka panjang proyeksi AE pada bidang BDG adalah

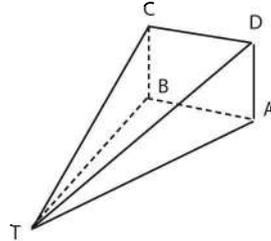
- A. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
- B. $\sqrt{6}$
- C. $\frac{3}{2}\sqrt{6}$
- D. $2\sqrt{6}$
- E. $3\sqrt{6}$

13. Kubus ABCD.EFGH mempunyai rusuk $a\sqrt{2}$. Jarak titik H ke bidang DEG sama dengan

- A. $\frac{2a}{3}$
- B. $\frac{a}{3}\sqrt{6}$
- C. $\frac{2a}{3}\sqrt{6}$
- D. $\frac{2a}{3}\sqrt{3}$
- E. a

14. Diketahui ABCD sebuah siku empat. ΔTAB sama kaki dengan alas AB. ΔTAB tegak lurus pada ABCD. Jika $AB = 12$, $AD = 7$ dan $TD = 25$ maka jarak T ke bidang ABCD adalah

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2111}$
- B. $6\sqrt{15}$
- C. $15\sqrt{6}$
- D. 6
- E. $\sqrt{612}$



15. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah 6 cm. Jika S adalah titik potong EG dan FH, maka jarak DH ke AS adalah

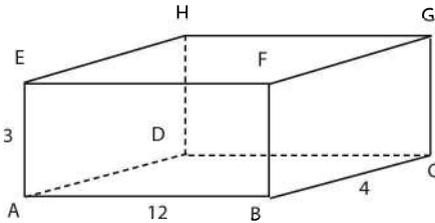
- A. $2\sqrt{3}$ cm
- B. 4 cm
- C. $3\sqrt{2}$ cm
- D. $2\sqrt{6}$ cm
- E. 6 cm

SUHAL LATIHAN - 1

16. ABCD.EFGH adalah sebuah kubus. Jika θ adalah sudut antara diagonal AG dan rusuk AD, maka $\cos \theta = \dots$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- C. $\sqrt{2}$
- D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- E. $\sqrt{3}$

17. Diberikan balok ABCD.EFGH dengan AB = 12 cm, BC = 4 cm, CG = 3 cm

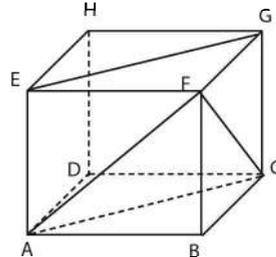


Jika sudut antara AG dengan bidang ABCD adalah x , maka $\sin x + \cos x = \dots$

- A. $\frac{6}{13}$
- B. $\frac{14}{13}$
- C. $\frac{4}{13}$
- D. $\frac{4\sqrt{10}+4}{13}$
- E. $\frac{4\sqrt{10}+3}{13}$

18. Dalam kubus ABCD.EFGH, θ adalah sudut lancip antara bidang ACF dan bidang ACE. Untuk θ berlaku

- A. $\sin \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- B. $\cos \theta = \frac{1}{2}$
- C. $\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
- D. $\operatorname{tg} \theta = \sqrt{2}$
- E. $\operatorname{cotg} \theta = \sqrt{3}$



19. Panjang rusuk kubus ABCD.EFGH adalah a. P, Q dan R berturut-turut adalah titik tengah BF, CD dan AD. Jika α sudut antara EP dan QR, maka $\operatorname{tg} \alpha = \dots$

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

E. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

20. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk 4. Titik T pada perpanjangan CG, sehingga $CG = GT$. Jika sudut antara TC dan bidang BDT adalah α , maka $\operatorname{tg} \alpha = \dots$

A. $\sqrt{2}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

E. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

21. Diketahui bidang empat T.ABC, $TA = TB = 5$, $TC = 2$, $CA = CB = 4$, $AB = 6$. Jika α sudut antara TC dan bidang TAB, maka $\cos \alpha$ adalah

A. $\frac{15}{16}$

D. $\frac{9}{16}$

B. $\frac{13}{16}$

E. $\frac{7}{16}$

C. $\frac{11}{16}$

22. Diketahui kubus ABCD.EFGH. Melalui diagonal AC dibuat dua bidang masing-masing membentuk sudut 30° dan 45° dengan bidang dasar ABCD dan berturut-turut memotong rusuk DH di titik P dan Q. Luas $\triangle ACP$: Luas $\triangle ACQ = \dots$

A. $1 : \sqrt{2}$

D. $1 : \sqrt{6}$

B. $\sqrt{2} : \sqrt{3}$

E. $2 : 3$

C. $1 : \sqrt{3}$

23. Bidang empat D.ABC diketahui ABC sama sisi, DC tegak lurus bidang ABC, panjang DC = 1 dan sudut DBC 30°. Bila α adalah sudut antara DAB dan CAB, maka tangen α adalah

- A. $\sqrt{3}$
- B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- C. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$
- D. $\frac{3}{2}$
- E. $\frac{2}{3}$

24. Diketahui kubus ABDEFGH dan α adalah sudut antara bidang AFH dan bidang BDHF. Nilai $\sin \alpha = \dots$

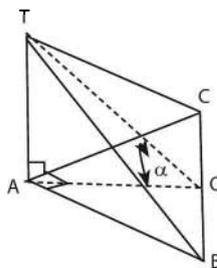
- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- D. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
- E. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

25. Sebuah piramida tegak T.ABCD mempunyai alas bujur sangkar ABCD dengan luas 100 cm² dan panjang rusuk tegaknya 13 cm. Jika x adalah sudut antara bidang TAB dan bidang TCD, maka $\sin \frac{1}{2}x = \dots$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{5}{12}$
- C. $\frac{5}{13}$
- D. $\frac{6}{13}$
- E. $\frac{5}{\sqrt{119}}$

26. Diketahui bidang empat T.ABC. Bidang TAB, TAC dan ABC tegak lurus. Jika TA = 3, AB = AC = $\sqrt{3}$ dan α sudut antara bidang TBC dan ABC, maka $\sin \alpha$ adalah

- A. $\sqrt{\frac{1}{7}}$
- B. $\sqrt{\frac{3}{7}}$
- C. $\sqrt{\frac{6}{7}}$
- D. $\sqrt{\frac{2}{7}}$
- E. $\sqrt{\frac{4}{7}}$



27. Bujur sangkar ABCD merupakan alas limas beraturan P.ABCD. Panjang sisi bujur sangkar sama dengan 2 cm dan panjang rusuk tegak PA sama dengan $\sqrt{3}$ cm. Jika sudut antara bidang PAB dan bidang PCD sama dengan α , maka $\sin \alpha = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{2} \sqrt{2}$
C. $\frac{1}{2} \sqrt{3}$
D. $\frac{1}{2} \sqrt{5}$
E. 1
28. Pada kubus ABCD.EFGH, jika θ adalah sudut antara bidang ACF dan ACE, maka $\sin \theta = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{1}{3} \sqrt{3}$
C. $\frac{1}{2} \sqrt{2}$
D. $\frac{1}{2} \sqrt{3}$
E. $\frac{1}{2} \sqrt{6}$

SOAL LATIHAN - 4

29. Kubus ABCD.EFGH berusuk a cm. Titik P, Q dan R adalah titik-titik tengah dari AD, AB dan BF. Penampang bidang PQR dengan kubus berupa
- A. bujur sangkar
B. segitiga sama sisi
C. segi lima beraturan
D. trapesium sama kaki
E. segi enam beraturan
30. Pada kubus ABCD.EFGH, titik P adalah titik tengah rusuk AE. Irisan bidang yang melalui P, D, dan F dengan kubus berbentuk
- A. persegi
B. segitiga
C. jajargenjang
D. trapesium
E. belah ketupat

31. Diketahui kubus ABCD.EFGH. Titik P, Q, dan R pertengahan rusuk AE, AB dan CG. Irisan bidang yang melalui titik P, Q, dan R dengan kubus berbentuk

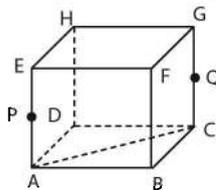
- A. trapesium
- B. segi empat sembarang
- C. segi enam beraturan
- D. segi lima
- E. persegi

32. ABCD.EFGH sebuah kubus. P, Q dan R masing–masing terletak pada perpanjangan BA, DC dan FE. Jika $AP = \frac{1}{2}AB$, $CQ = \frac{1}{2}CD$ dan $ER = \frac{1}{2}EF$, maka bidang yang melalui P, Q dan R dan membagi volume kubus menjadi dua bagian dengan perbandingan

- A. $\sqrt{3} : 1$
- B. $\sqrt{2} : 1$
- C. $1 : 1$
- D. $2 : \sqrt{5}$
- E. $2 : \sqrt{6}$

33. Diketahui kubus ABCD.EFGH. P pertengahan AE, Q pertengahan CG. Bidang yang melalui H, P dan Q membagi kubus atas dua bagian dengan perbandingan volumenya

- A. 3 : 4
- B. 3 : 2
- C. 3 : 1
- D. 2 : 1
- E. 1 : 1

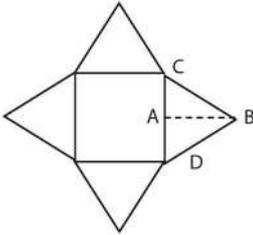


34. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 4 cm. Titik P pada rusuk AE dengan $AP = 3$ cm, Q titik tengah AB. Luas segitiga HPQ adalah

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{53}$ cm²
- B. $\sqrt{53}$ cm²
- C. $2\sqrt{53}$ cm²
- D. $\frac{1}{3}\sqrt{53}$ cm²
- E. $\frac{2}{3}\sqrt{53}$ cm²

35. Perbandingan rusuk sebuah balok adalah 3 : 4 : 5. Jika panjang diagonal ruang $20\sqrt{2}$ cm, maka rusuk terpanjangnya adalah
- A. 12 cm
B. 16 cm
C. 18 cm
D. 20 cm
E. 25 cm
36. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan rusuk a. Melalui diagonal DF dan titik tengah rusuk AE dan CG dibuat bidang datar. Luas bagian bidang di dalam kubus sama dengan
- A. $\frac{3}{2}a^2$
B. $a^2\sqrt{6}$
C. $\frac{1}{3}a^2\sqrt{6}$
D. $2a^2$
E. $\frac{1}{2}a^2\sqrt{6}$
37. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang masing-masing rusuk 4. Jika I di tengah-tengah AB dan J di tengah-tengah FG, maka luas segitiga ICJ sama dengan
- A. $5\sqrt{21}$
B. $4\sqrt{21}$
C. $3\sqrt{21}$
D. $2\sqrt{21}$
E. $\sqrt{21}$
38. Diketahui sebuah kerucut yang diameter alas dan tingginya sama panjang dengan belahan bola yang panjang jari-jarinya sama dengan jari-jari alas kerucut. Perbandingan volume belahan bola dan volume kerucut adalah
- A. 1 : 1
B. 2 : 1
C. 1 : 2
D. 3 : 2
E. 2 : 3

39. Jika bidang sisi sebuah limas beraturan dengan alas bujur sangkar direbahkan ke bidang alas, diperoleh gambar seperti di bawah ini. Isi limas tersebut adalah

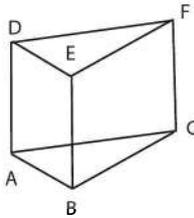


$$AB = 15 \text{ cm}$$

$$CD = 18 \text{ cm}$$

- A. $1889,2 \text{ cm}^3$
 B. 1620 cm^3
 C. 1296 cm^3
 D. 972 cm^3
 E. 729 cm^3

40.



Perhatikan gambar prisma tegak ABC DEF di atas. Jika volume limas F.ABC sama dengan 12 cm^3 dan tinggi prisma 4 cm, maka luas alas prisma tersebut adalah

- A. 3 cm^2
 B. 4 cm^2
 C. 6 cm^2
 D. 8 cm^2
 E. 9 cm^2

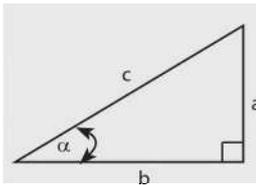


TRIGONOMETRI

18

A. PENGERTIAN DASAR

a. Perbandingan Trigonometri

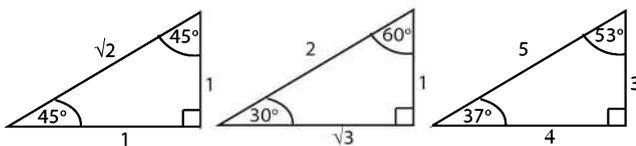


- $\sin \alpha = (\text{demi}) = \frac{\text{depan}}{\text{miring}} = \frac{a}{c}$
- $\cos \alpha = (\text{sami}) = \frac{\text{samping}}{\text{miring}} = \frac{b}{c}$
- $\tan \alpha = (\text{desa}) = \frac{\text{depan}}{\text{samping}} = \frac{a}{b}$

b. Rumus Identitas Dasar

- $\operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
- $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
- $\cotan \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha$
- $1 + \cotan^2 \alpha = \operatorname{cosec}^2 \alpha$

c. Nilai Perbandingan Sudut-sudut Istimewa



Tabel nilai perbandingan sudut-sudut istimewa

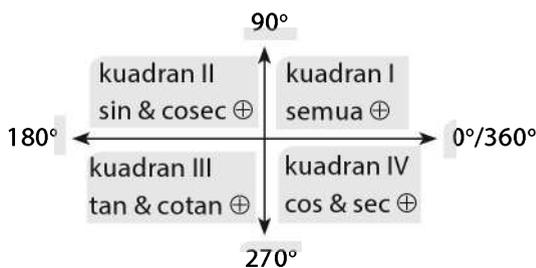
	0°	30°	37°	45°	53°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\approx \frac{3}{5}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\approx \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	1
cos	1	$\frac{1}{2} \sqrt{3}$	$\approx \frac{4}{5}$	$\frac{1}{2} \sqrt{2}$	$\approx \frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{3} \sqrt{3}$	$\approx \frac{3}{4}$	1	$\approx \frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	∞

catatan:

- \approx = nilai pendekatan
- ∞ = tak terdefinisi

d. Nilai Sudut yang Derelasi

1. Kuadran



- Kuadran I $\rightarrow 0^\circ < \alpha < 90^\circ$
- Kuadran II $\rightarrow 90^\circ < \alpha < 180^\circ$
- Kuadran III $\rightarrow 180^\circ < \alpha < 270^\circ$
- Kuadran IV $\rightarrow 270^\circ < \alpha < 360^\circ$

2. Nilai perbandingan sudut yang berelasi

- **Kuadran I**

$$\sin (90 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$

$$\cos (90 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$$

$$\tan (90 - \alpha)^\circ = \cotan \alpha^\circ$$

- **Kuadran II**

$$\sin (180 - \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$$

$$\cos (180 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$$

$$\tan (180 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha^\circ$$

$$\sin (90 + \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$

$$\cos (90 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\tan (90 + \alpha)^\circ = -\cotan \alpha^\circ$$

- **Kuadran III**

$$\sin (180 + \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos (180 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$$

$$\tan (180 + \alpha)^\circ = \tan \alpha^\circ$$

$$\sin (270 - \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$$

$$\cos (270 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\tan (270 - \alpha)^\circ = \cotan \alpha^\circ$$

- **Kuadran IV**

$$\sin (360 - \alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos (360 - \alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$

$$\tan (360 - \alpha)^\circ = -\tan \alpha^\circ$$

$$\sin (270 + \alpha)^\circ = -\cos \alpha^\circ$$

$$\cos (270 + \alpha)^\circ = \sin \alpha^\circ$$

$$\tan (270 + \alpha)^\circ = -\cotan \alpha^\circ$$

3. Bentuk umum FT ($n \cdot 90^\circ \pm \alpha$), dengan $n \in$ bilangan cacah

- **untuk** n genap \rightarrow FT tetap
- **untuk** n ganjil \rightarrow FT berubah
($\sin \leftrightarrow \cos$, $\cos \leftrightarrow \sin$, $\tan \leftrightarrow \cot$)

Catatan: FT = sin, cos, dan tan

Sudut $(-\alpha)$

$$\sin(-\alpha)^\circ = -\sin \alpha^\circ$$

$$\cos(-\alpha)^\circ = \cos \alpha^\circ$$

$$\tan(-\alpha)^\circ = -\tan \alpha^\circ$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Bila $0^\circ < a < 90^\circ$ dan $\tan a^\circ = \frac{5}{\sqrt{11}}$, maka $\sin a^\circ = \dots$

A. $\frac{5}{6}$

D. $\frac{5}{36}$

B. $\frac{25}{36}$

E. $\frac{1}{36}\sqrt{11}$

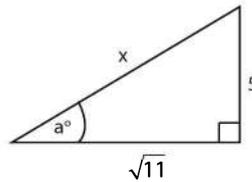
C. $\frac{1}{6}\sqrt{11}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \tan a^\circ = \frac{5}{\sqrt{11}} \rightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + (5)^2} \\ = \sqrt{36} = 6$$

$$\Leftrightarrow \sin a^\circ = \frac{5}{x} = \frac{5}{6} \text{ (} a^\circ \text{ di kuadran I)}$$



2. Jika sudut θ di kuadran IV dan $\cos \theta = \frac{1}{a}$, maka $\sin \theta = \dots$

A. $-\sqrt{a^2-1}$

D. $\frac{-\sqrt{a^2-1}}{a}$

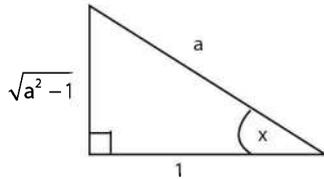
B. $-\sqrt{1-a^2}$

E. $\frac{\sqrt{a^2-1}}{a}$

C. $\frac{-1}{\sqrt{a^2-1}}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \cos \theta = \frac{1}{a} \rightarrow \theta = \text{di kuadran IV } (a > 0)$$



$$\Leftrightarrow \sin \theta = -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a} \rightarrow \text{sinus bernilai negatif di kuadran IV}$$

3. Jika $\triangle ABC$ siku-siku di B, $\angle A = 2 \angle C$, dan $AC = 50$, maka keliling $\triangle ABC$ adalah

A. $25(3 + \sqrt{3})$

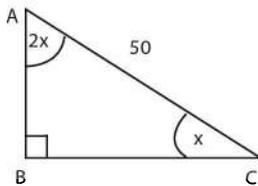
D. $25(6 + \sqrt{3})$

B. $25(4 + \sqrt{3})$

E. $25(7 + \sqrt{3})$

C. $25(5 + \sqrt{3})$

Jawaban: A



$$\Leftrightarrow x + 2x = 90^\circ \rightarrow 3x = 90^\circ \rightarrow x = 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{AB}{AC} \rightarrow AB = AC \sin x$$

$$= 50 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 25$$

$$\cos x = \frac{BC}{AC} \rightarrow BC = AC \cos x$$

$$= 50 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3}\right) = 25 \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Keliling } \triangle ABC = AB + BC + AC$$

$$= 25 + 25 \sqrt{3} + 50$$

$$\begin{aligned}
&= 75 + 25 \sqrt{3} \\
&= 25(3 + \sqrt{3})
\end{aligned}$$

4. Jika $\alpha = \frac{4}{3}\pi$, maka $\frac{1}{\sqrt{3}} \tan \alpha \sin \alpha + \cos \alpha = \dots$

- | | |
|-------------------------------|---|
| A. $1 - \sqrt{3}$ | D. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| B. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ | E. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ |
| C. $-1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ | |

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3}\pi = 240^\circ$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \tan 240^\circ &= \tan (180^\circ + 60^\circ) \\
&= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\
\sin 240^\circ &= \sin (180^\circ + 60^\circ) \\
&= -\sin 60^\circ = -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\
\cos 240^\circ &= \cos (180^\circ + 60^\circ) \\
&= -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \tan 240^\circ \sin 240^\circ + \cos 240^\circ \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Menghitung nilai sudut tiga digit.

- Jika **angka yang pertama** yang dijumlah **ganjil**, maka fungsi trigonometri **berubah**.
($\sin \leftrightarrow \cos$, $\cos \leftrightarrow \sin$, $\tan \leftrightarrow \cot$)
- Jika **angka yang pertama** yang dijumlah **genap**, maka fungsi trigonometri **tetap**.
- Nilai + dan - ditentukan oleh **kuadran**.

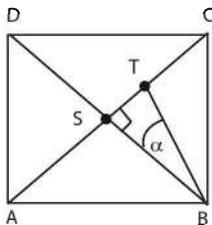
$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \bullet \alpha_{(\text{kuadran III})} = \frac{4}{3}\pi = \underbrace{240^\circ}_+ = 60^\circ \\
&\bullet \text{ angka pertama (2) genap, fungsi tetap}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \frac{1}{\sqrt{3}} \tan 240^\circ \sin 240^\circ + \cos 240^\circ \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \tan 60^\circ (-\sin 60^\circ) + (-\cos 60^\circ) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)(\sqrt{3})\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

5. Diagonal bujur sangkar ABCD yang sisinya $6a$ berpotongan di titik S . Jika T terletak pada SC dan $ST = \frac{1}{3} SC$, maka $\sin \angle TBS = \dots$

- A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$ D. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$
 B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ E. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$
 C. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

Jawaban: E



$$\Leftrightarrow AC = BD = \text{diagonal bidang} = 6a\sqrt{2}$$

$$BS = \frac{1}{2} BD = 3a\sqrt{2}$$

$$ST = \frac{1}{6} AC = a\sqrt{2}$$

$$TB = \sqrt{(BS)^2 + (ST)^2} = 2a\sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow \sin \angle TBS = \frac{ST}{TB} = \frac{a\sqrt{2}}{2a\sqrt{5}} = \frac{1}{10}\sqrt{10}$$

6. $\cos^2(30^\circ) + \cos^2(40^\circ) + \cos^2(50^\circ) + \cos^2(60^\circ) = \dots$
- A. 2 D. $\frac{1}{2}$
 B. $\frac{3}{2}$ E. 0
 C. 1

Jawaban: A

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \cos 30^\circ &= \cos(90^\circ - 60^\circ) = \sin 60^\circ \\ \cos 40^\circ &= \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ \\ \Leftrightarrow \cos^2(30^\circ) + \cos^2(40^\circ) + \cos^2(50^\circ) + \cos^2(60^\circ) \\ &= \sin^2 60^\circ + \underbrace{\sin^2 50^\circ + \cos^2 50^\circ}_1 + \cos^2 60^\circ \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

7. Jika $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{2}$, maka $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \dots$

- A. $\frac{1}{2}$
- B. $\frac{4}{3}$
- C. $\frac{9}{16}$
- D. $\frac{5}{8}$
- E. $\frac{11}{16}$

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \text{misal: } a &= \sin \theta \text{ dan } b = \cos \theta \\ \Leftrightarrow a + b &= \frac{1}{2} \\ (a + b)^2 &= \frac{1}{4} \\ \underbrace{(a^2 + b^2)}_1 + 2ab &= \frac{1}{4} \\ 2ab &= -\frac{3}{4} \rightarrow ab = -\frac{3}{8} \\ \Leftrightarrow a^3 + b^3 &= (a + b)^3 - 3ab(a + b) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \sin^3 \theta + \cos^3 \theta &= \frac{11}{16}\end{aligned}$$

8. Nilai dari $\log(\tan 2^\circ) + \log(\tan 3^\circ) + \dots + \log(\tan 88^\circ) = \dots$

- A. 0
- B. 1
- C. 45
- D. 89
- E. 90

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \tan (90^\circ - \alpha) = \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$$

$$\begin{aligned} \bullet \tan 2^\circ &= \cot (90^\circ - 2^\circ) \\ &= \cot 88^\circ \\ &= \frac{1}{\tan 88^\circ} \end{aligned}$$

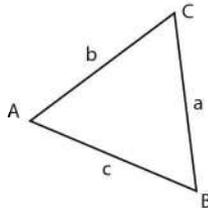
$$\bullet \tan 3^\circ = \frac{1}{\tan 87^\circ} \rightarrow \text{dan seterusnya.}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \log (\tan 2^\circ) + \log (\tan 3^\circ) + \dots + \log (\tan 88^\circ) \\ &= \log (\tan 2^\circ \cdot \tan 3^\circ \cdot \dots \cdot \tan 87^\circ \cdot \tan 88^\circ) \\ &= \log \left(\frac{1}{\tan 88^\circ \cdot \tan 87^\circ} \dots \frac{1}{\tan 87^\circ \cdot \tan 88^\circ} \right) \\ &= \log 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

B. RUMUS-RUMUS DALAM SEGITIGA

a. Aturan Sinus

$$\bullet \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$



b. Aturan Cosinus

- $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$
- $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$

C. Luas $\triangle ABC$

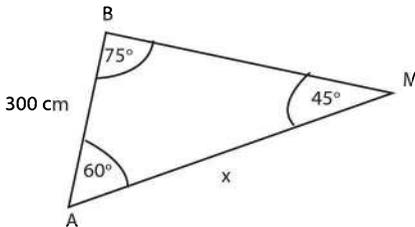
- $L_{\triangle} = \frac{1}{2}(b)(c)\sin A$
 $= \frac{1}{2}(a)(c)\sin B$
 $= \frac{1}{2}(a)(b)\sin C$
- $L_{\triangle} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, dengan $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

9. Diketahui segitiga MAB dengan $AB = 300$ cm, sudut $MAB = 60^\circ$ dan sudut $ABM = 75^\circ$, maka $AM = \dots$

- A. $150(1 + \sqrt{3})$ cm D. $150(\sqrt{2} + \sqrt{6})$ cm
B. $150(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm E. $150(\sqrt{3} + \sqrt{6})$ cm
C. $150(3 + \sqrt{3})$ cm

Jawaban: A



$$\Leftrightarrow \angle AMB = 180^\circ - (75^\circ + 60^\circ) = 45^\circ$$

\Leftrightarrow Perhatikan $\triangle ABM!$

$$\frac{x}{\sin 75^\circ} = \frac{300}{\sin 45^\circ}$$
$$\frac{x}{\frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{300}{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{75(\sqrt{6} + \sqrt{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$x = 75(\sqrt{12} + \sqrt{4})$$

$$x = 75(2\sqrt{3} + 2)$$

$$x = 150(1 + \sqrt{3})$$

10. Dalam $\triangle ABC$, jika $AC = 8$, $BC = 4\sqrt{2}$, dan $\angle ABC = 45^\circ$, maka $\tan \angle BAC = \dots$

A. $\frac{1}{3}\sqrt{2}$

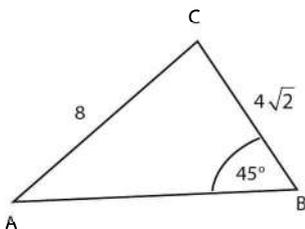
D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

E. $\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jawaban: B



⇔ Perhatikan $\triangle ABC!$

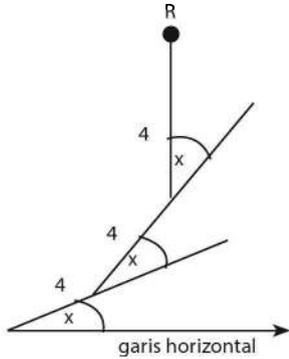
$$\frac{4\sqrt{2}}{\sin \angle BAC} = \frac{8}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{4\sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\angle BAC = 30^\circ$$

⇔ $\tan \angle BAC = \tan 30^\circ = \frac{1}{3}\sqrt{3}$

11.



Jarak dari titik R ke garis horizontal adalah

- | | |
|----------------------|-----------------------|
| A. $3 + \sqrt{3}$ cm | D. $6 + 2\sqrt{3}$ cm |
| B. $3 - \sqrt{3}$ cm | E. $6 - 2\sqrt{3}$ cm |
| C. $3 + 2\sqrt{3}$ m | |

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 3x = 90^\circ \rightarrow x = 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin 120^\circ}$$

$$a = \frac{4(\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin 30^\circ = \frac{b}{4+a}$$

$$b = (\frac{1}{2})(4 + \frac{4}{\sqrt{3}})$$

$$= (\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}) \rightarrow \text{dikali } \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jarak titik R ke garis horizontal}$$

$$= 4 + a + b$$

$$= \frac{12}{3} + \frac{6+2\sqrt{3}}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$= (6 + 2\sqrt{3}) \text{ cm}$$

12. Dalam suatu lingkaran yang berjari-jari 8 cm, dibuat segi-8 beraturan. Panjang sisi segi-8 tersebut adalah

- A. $\sqrt{128-64\sqrt{3}}$ cm D. $\sqrt{128+16\sqrt{2}}$ cm
 B. $\sqrt{128-64\sqrt{2}}$ cm E. $\sqrt{128-16\sqrt{3}}$ cm
 C. $\sqrt{128-16\sqrt{2}}$ cm

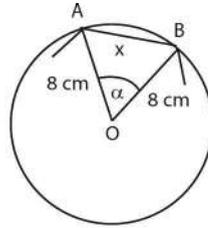
Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

\Leftrightarrow Panjang sisi segi 8 beraturan adalah:

$$x = \sqrt{8^2 + 8^2 - 2(8)(8) \cos 45^\circ}$$

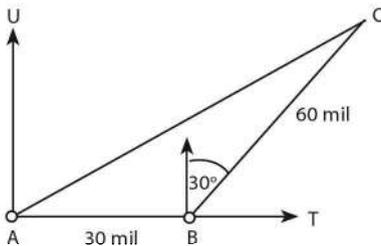
$$= \sqrt{128 - 64\sqrt{2}} \text{ cm}$$



13. Sebuah kapal berlayar ke arah timur sejauh 30 mil. Kemudian kapal melanjutkan perjalanan dengan arah 30° sejauh 60 mil. Jarak kapal terhadap posisi saat kapal berangkat adalah

- A. $10\sqrt{37}$ mil D. $30\sqrt{(5+2\sqrt{3})}$ mil
 B. $30\sqrt{7}$ mil E. $30\sqrt{(5-2\sqrt{3})}$ mil
 C. $30\sqrt{(5+2\sqrt{2})}$ mil

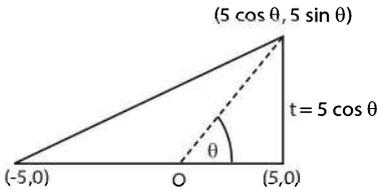
Jawaban: B



16. Diketahui segitiga dengan titik sudut $(-5, 0)$, $(5, 0)$, dan $(5 \cos \theta, 5 \sin \theta)$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Banyak nilai θ yang mungkin agar luas segitiga tersebut 10 adalah

- A. 1
 B. 2
 C. 3
 D. 4
 E. 8

Jawaban: D



$$\Leftrightarrow \text{Luas } \Delta = \frac{1}{2} \cdot (\text{alas}) \cdot (\text{tinggi})$$

$$10 = \frac{1}{2} \cdot (10) \cdot (5 \sin \theta)$$

$$|\sin \theta| = \frac{2}{5} \rightarrow \sin \theta = \pm \frac{2}{5}$$

- $|\sin \theta| = \frac{2}{5} \rightarrow \theta_1 = \text{di kuadran I}$
 $\rightarrow \theta_2 = \text{di kuadran II}$
- $\sin \theta = -\frac{2}{5} \rightarrow \theta_3 = \text{di kuadran III}$
 $\rightarrow \theta_4 = \text{di kuadran IV}$

\Leftrightarrow Jadi, ada 4 buah θ yang memenuhi.

C. RUMUS SUDUT

a. Jumlah dan Selisih Dua Sudut

- $\sin (\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta \pm \cos \alpha \cdot \sin \beta$
- $\cos (\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta \mp \sin \alpha \cdot \sin \beta$
- $\tan (\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \cdot \tan \beta}$

h. Sudut Rangkap

- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
 $= 1 - 2 \sin^2 \alpha$
 $= 2 \cos^2 \alpha$
- $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$
- $\sin \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$
- $\cos \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$
- $\tan \frac{1}{2}\alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
 $= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}$
- $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$
- $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$
- $\tan 3\alpha = \frac{3 \tan \alpha \cdot \tan^3 \alpha}{1 - \tan^3 \alpha}$

c. Jumlah dan Selisih Sin dan Cos

- $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \sin \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$

d. Perkalian Sinus dan Cosinus

- $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
- $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$
- $-2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$

TIPS ... MENINGAT RUMUS:

	$\frac{1}{2}+$		$\frac{1}{2}-$	
$S+S$	=		$2SC$	
$S-S$	=		$2CS$	
$C+C$	=		$2CC$	
$C-C$	=		$2SS$	
		$+$		$-$

Cara membaca

- $C + C = 2 SC$
 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cdot \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$
- $2 SC = S+S$
 $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

JUMLAH DAN SELISIH DUA SUDUT

17. Jika $\tan \alpha = 1$ dan $\tan \beta = \frac{1}{3}$ dengan α dan β sudut lancip, maka $\sin(\alpha - \beta) = \dots$

- A. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$
- B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{2}{5}$
- E. $\frac{1}{5}$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \tan \alpha = 1 &\rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ &\cos \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \tan \beta = \frac{1}{3} &\rightarrow \sin \beta = \frac{1}{10}\sqrt{10} \\ &\cos \beta = \frac{3}{10}\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{10}}{10} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{10} \\
 &= \frac{2\sqrt{20}}{20} = \frac{4\sqrt{5}}{20} = \frac{1}{5}\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

18. Dalam suatu segitiga ABC diketahui $\cos \angle A = \frac{3}{5}$ dan $\cos \angle B = \frac{5}{13}$.
 Nilai $\sin \angle C = \dots$

- | | |
|---------------------|---------------------|
| A. $\frac{56}{65}$ | D. $-\frac{33}{65}$ |
| B. $\frac{33}{65}$ | E. $-\frac{56}{65}$ |
| C. $-\frac{16}{65}$ | |

Jawaban: A

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \cos \angle A = \frac{3}{5} &\rightarrow \sin \angle A = \frac{4}{5} \\
 \cos \angle B = \frac{5}{13} &\rightarrow \sin \angle B = \frac{12}{13} \\
 \Leftrightarrow \sin \angle C = \sin (180^\circ - (A + B)) \\
 &= \sin (A + B) \\
 &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\
 &= \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} \\
 &= \frac{56}{65}
 \end{aligned}$$

19. $\cos 35^\circ \cos 15^\circ - \sin 35^\circ \sin 15^\circ = \dots$

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. $\sin 40^\circ$ | D. $\sin 20^\circ$ |
| B. $\sin 50^\circ$ | E. $\cos 20^\circ$ |
| C. $\cos 40^\circ$ | |

Jawaban: A

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \cos 35^\circ \cos 15^\circ - \sin 35^\circ \sin 15^\circ \\
 &= \cos (35^\circ + 15^\circ) \\
 &= \cos 50^\circ \\
 &= \cos (90^\circ - 40^\circ) \\
 &= \sin 40^\circ
 \end{aligned}$$

20. Diketahui $\alpha - \beta = \frac{1}{3} \pi$ dan $\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{4}$ dengan α dan β merupakan sudut lancip. Nilai $\cos (\alpha + \beta) = \dots$

- A. 1
 B. $\frac{3}{4}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{1}{4}$
 E. 0

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow (\alpha - \beta) = \frac{1}{3} \pi$$

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \frac{1}{3} \pi$$

$$\cos \alpha \cos \beta + \underbrace{\sin \alpha \sin \beta}_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

21. Jika $\sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{A}$ dan $\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{B}$, maka $\cos (\alpha + \beta) = \dots$

- A. $A + B - 1$
 B. $\frac{A+B-1}{2}$
 C. $A + B - 2$
 D. $\frac{A+B-2}{2}$
 E. $\frac{A+B-1}{4}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \sin \alpha - \sin \beta = \sqrt{A} \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$\sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = A \quad \dots(1)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sqrt{B} \rightarrow \text{dikudratkan}$$

$$\cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = B \quad \dots(2)$$

• Ingat: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$$\Leftrightarrow \text{Jika persamaan (1) + (2), maka}$$

$$2 + 2 (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) = A + B$$

$$2 + 2 \cos (\alpha + \beta) = A + B$$

$$\cos (\alpha + \beta) = \frac{A+B-2}{2}$$

22. Jika α dan β sudut lancip, $\cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan $\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}$,

maka $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \dots$

A. $2 - \sqrt{3}$

D. $1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}$

B. $1 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$

E. $\frac{2}{3}\sqrt{3} - 1$

C. $3 - 2\sqrt{3}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha - \beta) =$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\frac{1}{2} + \sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

$$\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} - 1$$

SUDUT RANGKAP

23. Diketahui $\sin \alpha = \frac{1}{5}\sqrt{13}$, α sudut lancip. Nilai $\cos 2\alpha = \dots$

A. -1

D. $-\frac{1}{25}$

B. $-\frac{1}{2}$

E. 1

C. $-\frac{1}{5}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$= 1 - 2 \left(\frac{1}{5}\sqrt{13} \right)^2$$

$$= 1 - \frac{26}{25} = -\frac{1}{25}$$

24. $\sin^2 A \cos^2 A = \dots$

A. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4A$

D. $\frac{1}{4} + -\frac{1}{4} \cos 4A$

B. $\frac{1}{2} + -\frac{1}{2} \cos 4A$

E. $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4A$

C. $\frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos 4A$

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (\sin A \cdot \cos A)^2 &= \left(\frac{1}{2} \sin 2A\right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (\sin 2A)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4A\right) \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4A \end{aligned}$$

25. Jika $\sin x \cos x = a$ untuk $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$, maka $\tan 2\alpha = \dots$

A. $\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$

D. $\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}}$

B. $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$

E. $2a^2$

C. $\frac{2a}{\sqrt{1-4a^2}}$

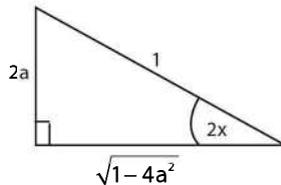
Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \sin x \cos x = a$$

$$\frac{1}{2} \sin 2x = a$$

$$\sin 2x = 2a$$

$$\bullet \tan 2x = \frac{2a}{\sqrt{1-4a^2}}$$



26. Jika $\sin \theta - 2 \cos \theta = 0$, maka $\cos 2\theta = \dots$

A. $-\frac{3}{5}$

D. $\frac{1}{2}$

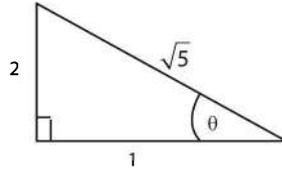
B. $-\frac{4}{5}$

E. $\frac{4}{5}$

C. $-\frac{1}{2}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin \theta - 2 \cos \theta &= 0 \\ \sin \theta &= 2 \cos \theta \rightarrow \text{dibagi } \cos \theta \\ \tan \theta &= 2 \\ \Leftrightarrow \cos 2\theta &= 1 - 2 \sin^2 \theta \\ &= 1 - 2\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{8}{5} = -\frac{3}{5}\end{aligned}$$



27. $\frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} = \dots$

- A. $\frac{1}{1 - \cos 2x}$
- B. $\frac{1}{1 - \sin 2x}$
- C. $\frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$

- D. $\frac{1 + 2 \sin x}{1 - 2 \sin x}$
- E. $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}$

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \frac{(\cos x + \sin x)^2}{(\cos x - \sin x)^2} &= \frac{\cos^2 x + \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} + \sin^2 x}{\cos^2 x - \underbrace{2 \sin x \cos x}_{\sin 2x} + \sin^2 x} \\ &= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin 2x}{(\cos^2 x + \sin^2 x) - \sin 2x} \\ &= \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}\end{aligned}$$

JUMLAH DAN SELISIH SIN DAN COS

28. Nilai dari $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ} = \dots$

- A. $-\sqrt{3}$
- B. $-\sqrt{2}$
- C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
- D. $\sqrt{3}$
- E. $\sqrt{2}$

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow & \frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\cos 105^\circ + \cos 15^\circ} \\ & = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(75^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(75^\circ - 15^\circ)}{2 \cos \frac{1}{2}(105^\circ + 15^\circ) \cos \frac{1}{2}(105^\circ - 15^\circ)} \\ & = \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ} = \frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

PERKALIAN SIN DAN COS

29. A, B, dan C adalah sudut-sudut $\triangle ABC$. Jika $A - B = 30^\circ$ dan $\sin C = \frac{5}{6}$, maka $\sin A \cos B = \dots$

A. $\frac{3}{4}$

D. $-\frac{2}{3}$

B. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{6}$

Jawaban: B

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \sin A \cos B &= \frac{1}{2}\{\sin(A+B) + \sin(A-B)\} \\ &= \frac{1}{2}\{\sin(180^\circ - C) + \sin 30^\circ\} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sin C + \frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\end{aligned}$$

30. $\cot 105^\circ \cdot \tan 15^\circ = \dots$

A. $-7 + 4\sqrt{3}$

D. $-7 - 4\sqrt{3}$

B. $7 + 4\sqrt{3}$

E. $-7 + 2\sqrt{3}$

C. $7 - 4\sqrt{3}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \cot 105^\circ \cdot \tan 15^\circ &= \frac{\cos(105^\circ) \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(105^\circ) \cdot \cos(15^\circ)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(\sin(105^\circ + 15^\circ) - \sin(105^\circ - 15^\circ))}{\frac{1}{2}(\sin(105^\circ + 15^\circ) + \sin(105^\circ - 15^\circ))}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sin(120^\circ) - \sin(90^\circ)}{\sin(120^\circ) + \cos(90^\circ)} \\
 &= \frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} + 2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} - 2}{\sqrt{3} - 2} \right) = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{3 - 4} = -7 + 4\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

D. PERSAMAAN DAN PERTIDAKSAMAAN TRIGONOMETRI

a. Persamaan Basar Trigonometri

- $\sin x = \sin p \rightarrow \begin{cases} x_1 = p + n \cdot 360^\circ \\ x_2 = (180^\circ - p) + n \cdot 360^\circ \end{cases}$
- $\cos x = \cos p \rightarrow x = \pm p + n \cdot 360^\circ$
- $\tan x = \tan p \rightarrow x = p + n \cdot 180^\circ$

Catatan: $x \rightarrow$ bil real, dan $n \in$ bil bulat $(+, -, 0)$

Bentuk $a \cos x + b \sin x$

- $a \cos x + b \sin x = k \cos(x - \alpha)$, dengan $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ dan $\tan \alpha = \frac{b}{a}$
- **Persamaan $a \cos x + b \sin x = c$ memiliki penyelesaian hanya jika $a^2 + b^2 \geq c^2$**

h. Pertidaksamaan Trigonometri

- Jadikan ruas kanan nol
- Faktorkan dalam bentuk faktor linear
- Tentukan pembuat nol fungsi
- Buat garis bilangan untuk menentukan penyelesaian.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 4

31. Diketahui persamaan $\cos 2x + \cos x = 0$, untuk $0 < x \leq \pi$, nilai x yang memenuhi adalah

- A. $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{\pi}{2}$ D. $\frac{\pi}{3}$ dan π
B. $\frac{\pi}{2}$ dan π E. $\frac{\pi}{6}$ dan $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{\pi}{3}$ dan $\frac{\pi}{2}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cos 2x + \cos x &= 0 \\ (2 \cos^2 x - 1) + \cos x &= 0 \\ 2 \cos^2 x + \cos x - 1 &= 0 \\ (2 \cos x - 1)(\cos x + 1) &= 0 \\ \bullet \cos x &= \frac{1}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ \bullet \cos x &= -1 \rightarrow x = \pi \end{aligned}$$

32. Jika x_1 dan x_2 adalah solusi persamaan $\sqrt{2} + 2 \cos x = 0$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, maka $x_1 + x_2 = \dots$

- A. 310° D. 350°
B. 320° E. 360°
C. 340°

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \sqrt{2} + 2 \cos x &= 0 \\ \cos x &= -\frac{1}{2} \sqrt{2} \quad x = 135^\circ, 225^\circ \\ \Leftrightarrow x_1 + x_2 &= 135^\circ + 225^\circ = 360^\circ. \end{aligned}$$

33. Untuk sudut lancip θ yang merupakan suatu sudut dalam segitiga,

jika $\frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{2}$, maka $\theta = \dots$

- A. 30° D. 75°
B. 45° E. 90°
C. 60°

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{\tan^2 \theta - 1}{\tan^2 \theta + 1} = \frac{1}{2}$$

$$2 \tan^2 \theta - 2 = \tan^2 \theta + 1$$

$$\tan^2 \theta = 3$$

$$\tan \theta = \sqrt{3} \rightarrow \theta = 60^\circ$$

34. Nilai x di antara 0° dan 360° yang memenuhi persamaan $\sqrt{3} \cos x - \sin x = \sqrt{2}$ adalah

A. 15° dan 285°

D. 75° dan 315°

B. 75° dan 285°

E. 15° dan 75°

C. 15° dan 315°

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \underbrace{\sqrt{3} \cos x - \sin x}_{k \cos(x-\alpha)} = \sqrt{2}$$

- $k = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$

- $\tan \alpha = \frac{-1}{\sqrt{3}} \rightarrow \alpha = 330^\circ$ (kuadran IV)

$$\Leftrightarrow 2 \cos(x - 330^\circ) = \sqrt{2}$$

$$\cos(x - 330^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

- $(x - 330^\circ) = 45^\circ$ dan -45°

$$x = 375^\circ \text{ dan } 285^\circ \rightarrow 15^\circ \text{ dan } 285^\circ$$

35. Hasil penjumlahan dari semua anggota himpunan penyelesaian persamaan $3 \tan x + \cot x - 2\sqrt{3} = 0$ dengan $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah

A. $\frac{2}{3} \neq$

D. $\frac{4}{3} \neq$

B. $\frac{5}{6} \neq$

E. $\frac{5}{3} \neq$

C. $\frac{7}{6} \neq$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 3 \tan x + \frac{1}{\tan x} - 2\sqrt{3} = 0 \rightarrow \text{dikali } \tan x$$

$$3 \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + 1 = 0$$

$$(\sqrt{3} \tan x - 1)^2 = 0$$

- $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3} \rightarrow x$ di kuadran I & III

$$x = \frac{1}{6}\pi / \frac{7}{6}\pi$$

⇔ Jumlah semua x yang memenuhi adalah:

$$= \frac{1}{6}\pi + \frac{7}{6}\pi = \frac{8}{6}\pi + \frac{4}{3}\pi$$

36. Untuk $0 \leq x \leq 2\pi$, banyaknya nilai-nilai x yang memenuhi $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x = 0$ adalah

- | | |
|------|------|
| A. 2 | D. 5 |
| B. 3 | E. 7 |
| C. 4 | |

Jawaban: D

⇔ $8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x = 0$

$$8 \cos^2 x (\cos^2 x - 1) = 0$$

- $8 \cos^2 x = 0$

$$\cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

- $(\cos^2 x - 1) = 0$

$$\cos x = \pm 1 \rightarrow x = 0, \pi, 2\pi$$

⇔ Nilai x yang memenuhi adalah

$$x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi \text{ (ada 5 buah)}$$

37. Himpunan penyelesaian pertidaksamaan $2 \sin 2x^\circ + \sqrt{3} \leq 0$ untuk $0^\circ \leq x < 360^\circ$ adalah

- A. $\{x \mid 5^\circ \leq x \leq 75^\circ \text{ atau } 195^\circ \leq x \leq 225^\circ\}$
- B. $\{x \mid 30^\circ \leq x \leq 60^\circ \text{ atau } 210^\circ \leq x \leq 240^\circ\}$
- C. $\{x \mid 60^\circ \leq x \leq 120^\circ \text{ atau } 240^\circ \leq x \leq 300^\circ\}$
- D. $\{x \mid 105^\circ \leq x \leq 165^\circ \text{ atau } 285^\circ \leq x \leq 345^\circ\}$
- E. $\{x \mid 120^\circ \leq x \leq 150^\circ \text{ atau } 300^\circ < x \leq 330^\circ\}$

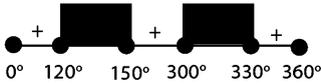
Jawaban: A

⇔ $2 \sin 2x^\circ + \sqrt{3} \leq 0$

$$\sin 2x^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$2x = 240^\circ/300^\circ/600^\circ/660^\circ$$

$$x = 120^\circ/150^\circ/300^\circ/330^\circ$$



⇔ Nilai x yang memenuhi $120^\circ \leq x \leq 150^\circ$ atau $300^\circ < x \leq 330^\circ$

38. Himpunan penyelesaian dari $\sin(x - 20^\circ) + \sin(x + 70^\circ) - 1 \geq 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ adalah

A. $\{x \mid 20^\circ \leq x \leq 110^\circ\}$

D. $\{x \mid x \leq 50^\circ \text{ atau } x \geq 130^\circ\}$

B. $\{x \mid 35^\circ \leq x \leq 100^\circ\}$

E. $\{x \mid x \leq 50^\circ \text{ atau } x \leq 310^\circ\}$

C. $\{x \mid x \leq 35^\circ \text{ atau } x \geq 145^\circ\}$

Jawaban: A

• Gunakan rumus $S + S = 2 S C$

$$\Leftrightarrow \sin(x - 20^\circ) + \sin(x + 70^\circ) - 1 \geq 0$$

$$2 \sin(x + 25^\circ) \cdot \cos(-45^\circ) = 1$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{2}\right) \sin(x + 25^\circ) = 1$$

$$\sin(x + 25^\circ) = \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$(x + 25^\circ) = 45^\circ/135^\circ$$

$$x = 20^\circ/110^\circ$$

⇔ Nilai x yang memenuhi: $20^\circ \leq x \leq 110^\circ$

39. Diberikan persamaan $\sin x = \frac{3-2a}{a-4}$. Banyak bilangan bulat a sehingga persamaan tersebut mempunyai penyelesaian adalah

A. 1

D. 4

B. 2

E. 5

C. 3

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{3-2a}{a-4}$$

Syarat punya penyelesaian :

$$|\sin x| \leq 1 \rightarrow \left| \frac{3-2a}{a-4} \right| \leq 1$$

$$\left| \frac{3-2a}{x} \right| \leq \left| \frac{a-4}{y} \right|, a \neq 4$$

$$(x+y)(x-y) \leq 0$$

$$(-1-a)(7-3a) \leq 0$$

$$(a+1)(3a-7) \leq 0 \rightarrow -1 \leq a \leq \frac{7}{3}$$

⇔ Jadi, nilai a yang bulat adalah $\{-1, 0, 1, 2\}$ = ada 4 buah

40. Nilai $\sqrt{3} \cos x - \sin x > 0$, jika

A. $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{5}$

D. $\frac{5\pi}{7} < x < \frac{4\pi}{3}$

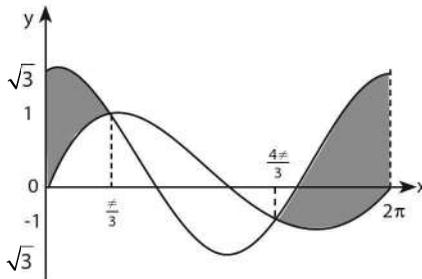
B. $\frac{\pi}{5} < x < \frac{7\pi}{6}$

E. $\frac{5\pi}{7} < x < \frac{9\pi}{7}$

C. $\frac{\pi}{7} < x < \frac{5\pi}{7}$

Jawaban: A

⇔ $\sqrt{3} \cos x - \sin x > 0 \rightarrow \sqrt{3} \cos x > \sin x$



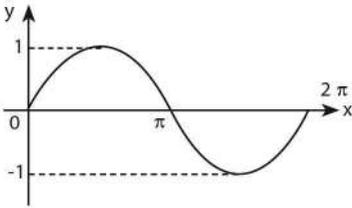
⇔ Yang memenuhi $\sqrt{3} \cos x > \sin x$ adalah

$$0 < x < \frac{\pi}{3} \text{ atau } \frac{4\pi}{3} < x < 2\pi$$

⇔ Interval pada jawaban yang memenuhi soal adalah $\frac{\pi}{8} < x < \frac{\pi}{5}$

E. GRAFIK FUNGSI TRIGONOMETRI

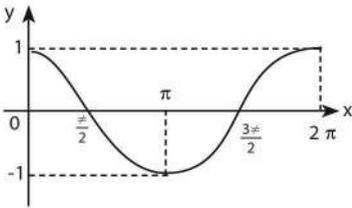
a. Grafik Fungsi $y = \sin x$



Fungsi $y = a \sin kx \pm c$

- **Periode fungsi = p**
$$= \frac{360^\circ}{|k|} = \frac{2\pi}{|k|}$$
- **Nilai maksimum dan minimum fungsi :**
Nilai maksimum = $|a| \pm c$
Nilai minimum = $-|a| \pm c$

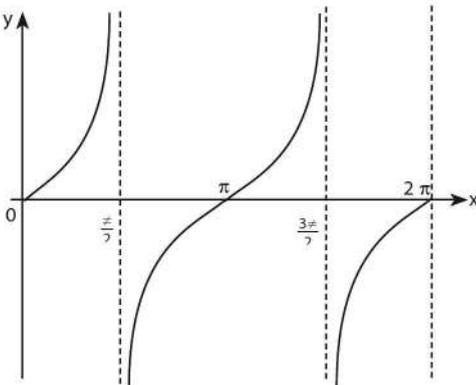
b. Grafik Fungsi $y = \cos x$



Fungsi $y = a \sin kx \pm c$

- **Periode fungsi = p**
$$= \frac{360^\circ}{|k|} = \frac{2\pi}{|k|}$$
- **Nilai maksimum dan minimum fungsi :**
Nilai maksimum = $|a| \pm c$
Nilai minimum = $-|a| \pm c$

c. Grafik Fungsi $y = \tan x$



Fungsi $y = a \tan kx \pm c$

- **Periode fungsi =**
$$p = \frac{180^\circ}{|k|} = \frac{\pi}{|k|}$$

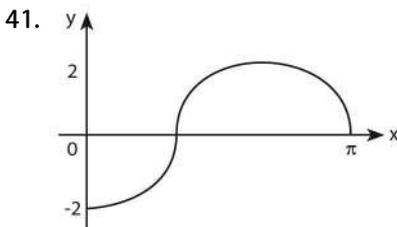
d. Translasi Grafik Fungsi Trigonometri

Dari bentuk: $y = f(x) = A \sin k(x \pm \theta) \pm C$
 $y = f(x) = A \cos k(x \pm \theta) \pm C$
 $y = f(x) = A \tan k(x \pm \theta) \pm C$

Catatan:

- $(+\theta) \rightarrow$ fungsi digeser **ke kiri** sejauh θ searah sb X
- $(-\theta) \rightarrow$ fungsi digeser **ke kanan** sejauh θ searah sb X
- $(+C) \rightarrow$ fungsi digeser **ke atas** sejauh c searah sb Y
- $(-C) \rightarrow$ fungsi digeser **ke bawah** sejauh c searah sb Y

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 5



Persamaan grafik di atas adalah

- A. $y = -2 \cos 2x$ D. $y = 2 \sin \frac{3}{2}x$
B. $y = 2 \cos \frac{3}{2}x$ E. $y = -2 \sin \frac{3}{2}x$
C. $y = -2 \cos \frac{3}{2}x$

Jawaban: C

\Leftrightarrow Kurva dasar pada soal adalah: $y = A \cos kx$

- Sketsa kurva adalah kurva yang terbalik sehingga $A = -2$
- Periode kurva $y = A \cos kx$ adalah $P = \frac{2\pi}{|k|}$.

Pada soal diketahui:

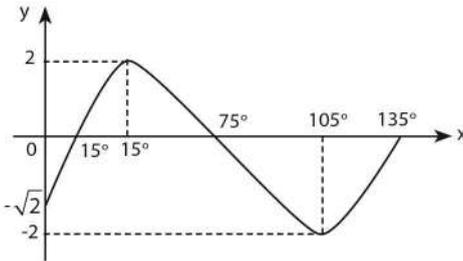
$$\frac{3}{4}P = \pi \rightarrow \frac{3}{4} \left(\frac{2\pi}{k} \right) = \pi$$
$$k = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

⇨ Jadi, persamaan kurvanya adalah $y = -2 \cos \frac{3}{2}x$

SOLUSI SMART!

⇨ Pada gambar kurva yang melalui titik $(0, -2)$ dan $(\pi, 0)$ hanya kurva $y = -2 \cos \frac{3}{2}x$

42. Persamaan grafik fungsi pada gambar adalah



- A. $y = -2 \sin (3x + 45)^\circ$
- B. $y = -2 \sin (3x - 15)^\circ$
- C. $y = -2 \sin (3x - 45)^\circ$
- D. $y = 2 \sin (3x + 15)^\circ$
- E. $y = 2 \sin (3x - 45)^\circ$

Jawaban: E

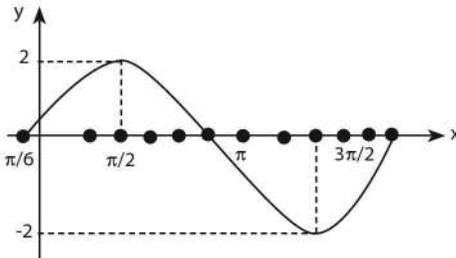
⇨ Dari kurva di atas

- A = Amplitudo = 2
- Periode dari 15° sampai $135^\circ = 120^\circ$

$$120^\circ = \frac{360^\circ}{k} \rightarrow k = 3$$

⇨ Persamaan kurva di atas adalah hasil dari kurva $y = 2 \sin 3x$ yang digeser ke kanan sejauh 15° , sehingga berubah menjadi $y = 2 \sin (3x - 45)^\circ$.

43.



Persamaan kurva di atas adalah

- A. $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$
B. $y = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ E. $y = 2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$
C. $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$

Jawaban: A

⇔ Kurva di atas adalah kurva $y = 2 \sin x$ yang digeser ke-kiri sejauh $\frac{\pi}{6}$, sehingga persamaanya menjadi $y = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

44. Nilai minimum $f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$ adalah

- A. -2 D. 1
B. -1 E. 2
C. 0

Jawaban: B

⇔ $y = a \sin kx + c$
• Nilai y minimum = $-|a| + c$

⇔ $f(x) = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

Nilai minimum $f(x) = -2 + 1 = -1$

45. Diketahui $F(x) = \sqrt{2} \cos 3x + 1$. Jika nilai maksimum $F(x)$ adalah a dan nilai minimum $F(x)$ adalah b, maka nilai $a^2 + b^2 = \dots$

- A. 3 D. 18
B. 6 E. 36
C. 12

Jawaban: B

⇔ $F(x) = \sqrt{2} \cos 3x + 1$.
Nilai maksimum $F(x) = a = \sqrt{2} + 1$
Nilai minimum $F(x) = b = -\sqrt{2} + 1$

⇔ $a^2 + b^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 + (-\sqrt{2} + 1)^2$
 $= (2 + 2\sqrt{2} + 1) + (2 - 2\sqrt{2} + 1) = 6$

46. Nilai maksimum dari $\frac{m}{15 \sin x - 8 \cos x + 25}$ adalah 2. Ini berarti m sama dengan
- A. 4
B. 16
C. 36
D. 64
E. 84

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{m}{15 \sin x - 8 \cos x + 25}$$

Perhatikan fungsi dari penyebut!

$$15 \sin x - 8 \cos x + 25$$

$$k = \sqrt{15^2 + (-8)^2} = 17 \text{ dan } c = 25$$

$$f(x) = \frac{m}{17 \cos(x - \alpha) + 25}$$

- \Leftrightarrow Nilai maksimum fungsi $f(x)$ terjadi jika penyebut minimum, sehingga $\rightarrow 2 = \frac{m}{-17 + 25} \rightarrow m = 16$

47. Nilai minimum dan maksimum fungsi $f(x) = 2[1 + \cos 2x \cos 2(x - \frac{\pi}{6})]$ berturut-turut adalah
- A. 0,5 dan 2,5
B. 0,5 dan 4,5
C. 1 dan 5
D. 1,5 dan 3,5
E. -0,5 dan 1,5

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow f(x) = 2 + \left\{ \underbrace{2 \cos 2x \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)}_{2CC = C+C} \right\}$$

$$f(x) = 2 + \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) + \cos \frac{\pi}{3}$$

$$f(x) = \cos \left(4x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \frac{1}{2}$$

$$k = 1 \text{ \& } c = 2 \frac{1}{2}$$

- \Leftrightarrow Nilai $f(x)$ minimum = $|k| + c = 1,5$
 Nilai $f(x)$ maksimum = $-|k| + c = 3,5$

LATIHAN SOAL 18

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika $\cos \beta = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$ dan sudut β terletak pada kuadran II, maka $\tan \beta =$
....
A. $\sqrt{3}$ D. $-\frac{1}{3}\sqrt{3}$
B. $\frac{1}{9}\sqrt{3}$ E. $-\sqrt{3}$
C. $\frac{1}{2}$
2. Diketahui $4 \sin 290^\circ + 2 \cos 520^\circ = p \cos 20^\circ$. Nilai $p =$
A. 6 D. -4
B. 4 E. -6
C. 3
3. $\cos (330^\circ) \cdot \tan (-315^\circ) - \sin (-210^\circ) \cdot \cotan 330^\circ =$
A. $\frac{1}{2} \sqrt{3}$ D. $\sqrt{3}$
B. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{1}{3} \sqrt{3}$
C. 1

4. Jika $\frac{1}{2}\pi < x < \pi$ dan $\tan x = a$, maka $(\sin x + \cos x)^2$ sama dengan

A. $\frac{a^2 + 2a + 1}{a^2 + 1}$

D. $\frac{a^2 - a + 1}{a^2 + 1}$

B. $\frac{a^2 - 2a + 1}{a^2 + 1}$

E. $\frac{a^2 - 2a - 1}{a^2 - 1}$

C. $\frac{a^2 + a + 1}{a^2 + 1}$

5. $\sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2A\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi - 2A\right) = \dots$

A. $2 \sin A$

D. $2 \cos 2A$

B. $2 \cos A$

E. $\cos 2A$

C. $2 \sin 2A$

6. Jika $\sin x = \frac{1}{5}\sqrt{5}$, maka $\cos x - 5 \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2 \sin(\pi - x) = \dots$

A. $-\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{5}\sqrt{5}$

D. $\frac{3}{5}\sqrt{5}$

B. $-\sqrt{5}$

E. $\frac{9}{5}\sqrt{5}$

C. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

7. Dalam $\triangle ABC$, jika D pada AB sehingga $CD \perp AB$, $BC = a$, $\angle CAB = 60^\circ$, dan $\angle ABC = 45^\circ$, maka $AD = \dots$

A. $\frac{1}{6}\sqrt{2} a$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{6} a$

B. $\frac{1}{3}\sqrt{3} a$

E. $\frac{1}{6}\sqrt{6} a$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{2} a$

8. Diagonal bujursangkar ABCD yang sisi-sisinya $4a$ berpotongan di titik S. Jika T titik tengah ruas garis SC, maka $\sin \angle TBS = \dots$

A. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{7}\sqrt{7}$

B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

E. $\frac{1}{10}\sqrt{10}$

C. $\frac{1}{6}\sqrt{6}$

14. Diketahui jari-jari lingkaran luar suatu segi-8 beraturan adalah r cm. Luas segi-8 yang dapat dibuat adalah

- A. $\frac{1}{4}r^2 \sqrt{2} \text{ cm}^2$ D. $r^2 \sqrt{2} \text{ cm}^2$
 B. $\frac{1}{2}r^2 \sqrt{2} \text{ cm}^2$ E. $2r^2 \sqrt{2} \text{ cm}^2$
 C. $\frac{3}{4}r^2 \sqrt{2} \text{ cm}^2$

15. Sebuah kapal berlayar dari pelabuhan A ke pelabuhan B sejauh 60 mil dengan arah 40° dari A, kemudian berputar haluan dilanjutkan ke pelabuhan C sejauh 90 mil, dengan arah 160° dari B. Jarak terdekat dari pelabuhan A ke C adalah

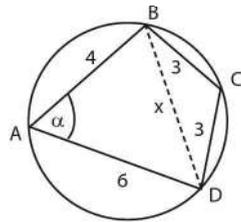
- A. $30\sqrt{2}$ mil D. $30\sqrt{10}$ mil
 B. $30\sqrt{5}$ mil E. $30\sqrt{30}$ mil
 C. $30\sqrt{7}$ mil

16. Pada $\triangle ABC$ diketahui $a + b = 10$, sudut $A = 30^\circ$, dan sudut $B = 45^\circ$, maka panjang sisi $b = \dots$

- A. $5(\sqrt{2} - 1)$ D. $10(\sqrt{2} + 2)$
 B. $5(2 - \sqrt{2})$ E. $10(\sqrt{2} + 1)$
 C. $10(2 - \sqrt{2})$

17. Diketahui empat titik A, B, C, dan D yang berada pada lingkaran dengan panjang $AB = 4$ cm, $BC = 3$ cm, $CD = 3$ cm, dan $AD = 6$ cm. Cosinus sudut BAD adalah

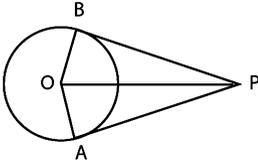
- A. $\frac{14}{33}$ D. $\frac{19}{33}$
 B. $\frac{16}{33}$ E. $\frac{20}{33}$
 C. $\frac{17}{33}$



18. Diketahui segitiga ABC dengan panjang $AC = BC = 6$, $AB = 6\sqrt{3}$. Luas segitiga ABC tersebut adalah ... satuan luas.

- A. $36\sqrt{3}$ D. $9\sqrt{2}$
 B. $18\sqrt{3}$ E. $4\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 C. $9\sqrt{3}$

19.



Layang-layang garis singgung OAPB, sudut $\text{APB} = 60^\circ$, dan panjang $\text{OP} = 20 \text{ cm}$. Luas OAPB =

- | | |
|-------------------------------|-------------------------------|
| A. 100 cm^2 | D. 200 cm^2 |
| B. $100\sqrt{2} \text{ cm}^2$ | E. $100\sqrt{5} \text{ cm}^2$ |
| C. $100\sqrt{3} \text{ cm}^2$ | |

20. Diketahui segitiga dengan titik sudut $(-6,0)$, $(6,0)$, dan $(6 \cos \theta, 6 \sin \theta)$ untuk $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Banyak nilai θ yang mungkin agar luas segitiga tersebut 12 adalah

- | | |
|------|------|
| A. 8 | D. 2 |
| B. 4 | E. 1 |
| C. 3 | |

SOAL LATIHAN - 1

21. $\cos 35^\circ \cos 20^\circ - \sin 35^\circ \sin 20^\circ = \dots$

- | | |
|--------------------|--------------------|
| A. $\sin 35^\circ$ | D. $\cos 15^\circ$ |
| B. $\sin 55^\circ$ | E. $\sin 15^\circ$ |
| C. $\cos 35^\circ$ | |

22. Jika $0 \leq x \leq 2\pi$ dan $0 \leq y \leq 2\pi$ memenuhi persamaan $\sin(x + y) = \sin x + \cos y$, maka $\cos y \sin x = \dots$

- | | |
|-------------------|------------------|
| A. -1 | D. $\frac{1}{2}$ |
| B. $-\frac{1}{2}$ | E. 1 |
| C. 0 | |

23. Jika sudut α dan β lancip, $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ dan $\sin \beta = \frac{7}{25}$, maka $\cos(\alpha + \beta)$ adalah

A. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{4}{5}$

B. $\frac{5}{3}$

E. $\frac{5}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

24. Diketahui x dan y sudut lancip dan $x - y = \frac{\pi}{6}$. Jika $\tan x = 3 \tan y$, maka $x + y = \dots$

A. $\frac{\pi}{3}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

B. $\frac{\pi}{2}$

E. π

C. $\frac{\pi}{6}$

25. Jika $\cotan 49^\circ = \frac{1}{a}$, maka $\sec 4^\circ$ sama dengan

A. $\frac{\sqrt{2(a^2 + 1)}}{a + 1}$

D. $\frac{a - 1}{\sqrt{2(a^2 + 1)}}$

B. $\frac{2\sqrt{a^2 + 1}}{a + 1}$

E. $\frac{a + 1}{\sqrt{2(a^2 + 1)}}$

C. $\frac{\sqrt{2(a^2 - 1)}}{a + 1}$

26. Diketahui $\sin A + \sin B = \sqrt{\frac{5}{3}}$ dan $\cos A + \cos B = 1$. Nilai $\cos(A - B) = \dots$

A. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{2}{3}$

E. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{5}{6}$

27. Dalam segitiga ABC, a , b , dan c adalah sudut-sudutnya. Jika $\tan a = \frac{3}{4}$ dan $\tan b = \frac{4}{3}$, maka $\sin c = \dots$

A. -1

D. $\frac{24}{25}$

B. $-\frac{24}{25}$

E. 1

C. $-\frac{7}{25}$

28. Jika $2 \cos (x + \frac{\pi}{4}) = \cos (x - \frac{\pi}{4})$, maka $\tan 2x = \dots$
- A. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{3}{4}$
 B. $\frac{2}{3}$ E. 1
 C. $\frac{1}{2}$
29. α adalah sudut lancip dengan $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Jika $\sin (x + \alpha) = 0$, maka $1 + \sin 2x = \dots$
- A. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
 B. $-\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{5}$
 C. $\frac{1}{5}$
30. Jika $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = a$, untuk $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, Maka $\tan \frac{\alpha}{2} = \dots$
- A. $\frac{a}{a+1}$ D. $\frac{a+1}{a-1}$
 B. $\frac{1}{a+1}$ E. $\frac{a}{a-1}$
 C. $\frac{a-1}{a+1}$
31. $\cos^4 x - \sin^4 x = \dots$
- A. $\sin 2x$ D. $\sin^2 2x$
 B. $\cos 2x$ E. $\sin x$
 C. $\cos^2 2x$
32. Jika $\sin x + \cos x = -\frac{1}{5}$ dan $\frac{3}{2}\pi \leq x < \pi$, maka $\sin 2x$ adalah
- A. $-\frac{24}{25}$ D. $\frac{8}{25}$
 B. $-\frac{7}{25}$ E. $\frac{24}{25}$
 C. $\frac{7}{25}$
33. Jika $p + q = \cos \alpha$, dan $\sqrt{2pq} = \sin \alpha$, maka $(p - q)^2 = \dots$
- A. $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1)$ D. $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha - 1)$
 B. $\frac{1}{2} (2 \cos 2\alpha - 1)$ E. $\frac{1}{2} (3 \cos 2\alpha - 1)$
 C. $\frac{1}{3} (\cos 2\alpha - 1)$

34. Nilai $\tan 75^\circ + \tan 15^\circ = \dots$

A. 0

B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. $2\sqrt{3}$

E. $4(2 + \sqrt{3})$

35. Nilai $\frac{\cos 140^\circ - \cos 100^\circ}{\sin 140^\circ - \sin 100^\circ} = \dots$

A. $-\sqrt{3}$

B. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

E. $\sqrt{3}$

36. Nilai dari $\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ = \dots$

A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

B. $-\frac{1}{2}$

C. 0

D. $\frac{1}{2}$

E. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$

37. Nilai $\sin 105^\circ + \cos 15^\circ = \dots$

A. $\frac{1}{2}(-\sqrt{6} - \sqrt{2})$

B. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

C. $\frac{1}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$

D. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

E. $\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

38. Jika $0 \leq (\alpha, \beta) \leq \frac{\pi}{3}$, $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = 0$ dan $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos \alpha = \frac{3}{4}$, maka $\alpha^2 - \beta^2 = \dots$

A. $-\frac{\pi^2}{12}$

B. 0

C. $\frac{\pi^2}{12}$

D. $-\frac{\pi^2}{6}$

E. $\frac{\pi^2}{6}$

SOAL LATIHAN - 4

39. A adalah himpunan penyelesaian persamaan $2 \cos 3x = 1$, dengan $0 \leq x \leq 2\pi$. Banyaknya himpunan bagian A dengan 3 anggota adalah
- A. 20
B. 15
C. 6
D. 3
E. 1
40. Himpunan nilai x yang memenuhi $\sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 1$, ($0 \leq x \leq 2\pi$) ialah
- A. $\left\{\frac{\pi}{6}\right\}$
B. $\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$
C. $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$
D. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$
E. $\left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$
41. Jika sudut lancip θ memenuhi $3 \cos \theta = 2 \sin^2 \theta$, maka besarnya sudut θ adalah
- A. 15°
B. 30°
C. 45°
D. 60°
E. 75°
42. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos 4x + 3 \sin 2x = -1$ untuk $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ adalah
- A. $\{120^\circ, 150^\circ\}$
B. $\{105^\circ, 165^\circ\}$
C. $\{30^\circ, 150^\circ\}$
D. $\{30^\circ, 165^\circ\}$
E. $\{15^\circ, 105^\circ\}$
43. Nilai x yang memenuhi $2 \cos^2 x + \sqrt{2} \cos x = 2$ untuk $0 \leq x \leq \pi$ adalah
- A. 0
B. $\frac{1}{6} \neq$
C. $\frac{1}{4} \neq$
D. $\frac{1}{3} \neq$
E. $\frac{1}{2} \neq$

44. Jika $\tan 2\theta + \frac{4}{\tan\theta} = 0$, maka $\cos\theta = \dots$
- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ D. $\frac{1}{2}\sqrt{6}$
 B. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ E. $\frac{1}{3}\sqrt{6}$
 C. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
45. Himpunan penyelesaian dari persamaan $\cos^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$ untuk $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ adalah
- A. $\{0, \frac{1}{2} \neq, \frac{3}{2} \neq, 2 \neq\}$ D. $\{0, \frac{1}{2} \neq, \neq, \frac{3}{2} \neq\}$
 B. $\{0, \frac{1}{3} \neq, \frac{5}{3} \neq, 2 \neq\}$ E. $\{0, \frac{1}{2} \neq, \neq, 2 \neq\}$
 C. $\{0, \frac{1}{3} \neq, \frac{3}{2} \neq, 2 \neq\}$
46. Jika θ_1 dan θ_2 memenuhi persamaan $10 \cos 2x + \sin x - 9 = 0$ dengan $\theta_1 > \theta_2$, maka $\csc^2 \theta_1 - \csc^2 \theta_2 = \dots$
- A. -41 D. 9
 B. -9 E. 41
 C. -1
47. Untuk $0^\circ < x < 360^\circ$, $\sin x > \frac{1}{2}$ bila
- A. $0^\circ < x < 30^\circ$ D. $180^\circ < x < 210^\circ$
 B. $30^\circ < x < 150^\circ$ E. $270^\circ < x < 330^\circ$
 C. $150^\circ < x < 180^\circ$
48. Nilai x yang memenuhi $\cos 3x > \frac{1}{2}$ untuk $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ adalah
- A. $0^\circ < x < 20^\circ$ atau $90^\circ < x < 140^\circ$
 B. $0^\circ \leq x < 20^\circ$ atau $100^\circ < x < 140^\circ$
 C. $0^\circ \leq x \leq 20^\circ$ atau $100^\circ < x < 140^\circ$
 D. $20^\circ < x < 100^\circ$ atau $140^\circ < x < 180^\circ$
 E. $30^\circ < x < 100^\circ$ atau $140^\circ < x < 180^\circ$
49. Nilai x yang memenuhi $\sin x - \cos x > 0$, $0 \leq x \leq 2\pi$ adalah
- A. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ D. $\pi < x < 2\pi$
 B. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ E. $\frac{3\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}$
 C. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

50. Himpunan penyelesaian pertaksamaan $\sin 2x < \sqrt{3} \cos x$ pada selang $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$ adalah

- A. $\{x \mid \frac{2\pi}{3} < x < \pi\}$ D. $\{x \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3}\}$
 B. $\{x \mid \frac{2\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}\}$ E. $\{x \mid \frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}\}$
 C. $\{x \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}\}$

51. Penyelesaian pertidaksamaan $3 \sin 2x - \sqrt{3} \cos 2x < 3$, $0 \leq x \leq \pi$, adalah

- A. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{5\pi}{12} < x \leq \pi$ D. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ atau $\frac{5\pi}{12} < x \leq \pi$
 B. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ atau $\frac{7\pi}{12} < x \leq \pi$ E. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{7\pi}{12} < x \leq \pi$
 C. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ atau $\frac{\pi}{3} < x \leq \pi$

52. Untuk $0 \leq x \leq \pi$, penyelesaian pertaksamaan $\cos 4x + 3 \cos 2x - 1 < 0$ adalah

- A. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$
 B. $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{6}$ E. $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{6}$
 C. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3}$

53. Jika $0 \leq x \leq 8$, maka nilai-nilai x yang memenuhi pertaksamaan $\sin \frac{\pi x}{4} \cdot \sin \frac{\pi x}{2} > 0$ adalah

- A. $2 < x < 4$ atau $4 < x < 6$ D. $0 < x < 4$ atau $5 < x < 6$
 B. $0 < x < 2$ atau $6 < x < 8$ E. $0 < x < 4$ atau $4 < x < 6$
 C. $1 < x < 3$ atau $4 < x < 6$

54. Himpunan semua sudut lancip x yang memenuhi pertaksamaan

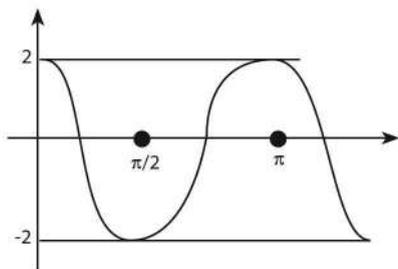
$$\left| \frac{2 \sin x + 1}{\sin x} \right| \geq 4 \text{ adalah}$$

- A. $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{4}$
 B. $0 < x \leq \frac{\pi}{6}$ E. $\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$
 C. $0 < x < \frac{\pi}{6}$

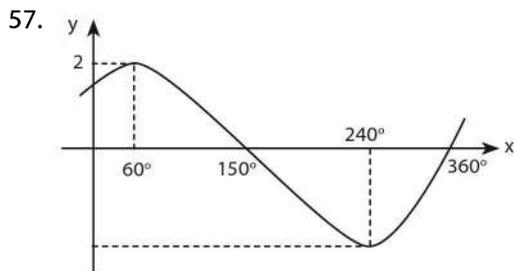
55. Diberikan persamaan $\sin x = \frac{a-1,5}{2-0,5a}$. Banyak bilangan bulat a sehingga persamaan tersebut mempunyai penyelesaian adalah
- A. 1
B. 2
C. 3
- D. 4
E. 5

SOAL LATIHAN - 5

56. Grafik berikut menggambarkan fungsi



- A. $y = \cos x$
B. $y = 2 \cos x$
C. $y = \cos 2x$
- D. $y = 2 \cos 2x$
E. $y = 2 \cos \frac{1}{2} x$



Persamaan kurva di atas adalah

- A. $y = 2 \sin x$
B. $y = 2 \cos x$
C. $y = \sin (x + 30^\circ)$
- D. $y = \cos (x + 30^\circ)$
E. $y = 2 \sin (x + 30^\circ)$

58. Fungsi $y = (-\sqrt{3})\cos x + \sin x + 4$ mempunyai nilai
- minimum = -2 untuk $x = 330^\circ$
 - maksimum = 2 untuk $x = 150^\circ$
 - minimum = 2 untuk $x = 150^\circ$
 - maksimum = 6 untuk $x = 330^\circ$
 - maksimum = 6 untuk $x = 150^\circ$
59. Nilai maksimum fungsi $y = 1 + \sin 2x + \cos 2x$ adalah
- 2
 - $1 + \sqrt{2}$
 - 3
 - $1 + 2\sqrt{2}$
 - 4
60. Jarak antara titik maksimum dan minimum pada kurva dari fungsi $y = 4 \sin \left\{ \frac{\pi(x-3)}{6} \right\}$ dengan $0 \leq x \leq 15$ adalah
- 2
 - 4
 - 6
 - 8
 - 10



LIMIT FUNGSI

19

A. PENGERTIAN LIMIT FUNGSI

a. Pengertian Limit

Limit suatu fungsi $f(x)$ untuk x mendekati nilai a adalah harga yang paling dekat dari $f(x)$ pada saat x mendekati nilai a , dari kiri dan dari kanan.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ terdefinisi jika dan hanya jika $\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a_+} f(x)$ atau

limit kiri sama dengan **limit kanan**.

Jadi, jika $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = fA$ artinya fA adalah nilai pendekatan untuk x

di sekitar a .

Untuk c konstanta, dalam konteks limit berlaku:

$$\frac{c}{0} = \infty, \frac{0}{c} = 0, \frac{c}{\infty} = 0, \frac{\infty}{c} = \infty.$$

b. Teorema Limit

- Jika $f(x) = x$, maka $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = a$

- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- Jika k konstanta, maka $\lim_{x \rightarrow a} k \cdot f(x) = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)\}^n = \left\{ \lim_{x \rightarrow a} f(x) \right\}^n$

B. LIMIT FUNGSI ALJABAR

a. Langkah Umum Penyelesaian

Limit
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \dots$

- Substitusikan $x = a$ ke $f(x)$
- Jika hasilnya bentuk tak tentu $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \text{ dan } \infty - \infty\right)$, maka $f(x)$ harus diuraikan
- Jika hasilnya bentuk tertentu, maka itulah nilai limitnya.

b. Cara Menguraikan Fungsi $f(x)$

1. Untuk $x \rightarrow c$, c (konstanta) dan hasilnya $\left(\frac{0}{0}\right)$, maka fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara:

- Faktorisasi
- Kali sekawan, jika $f(x)$ mengandung bentuk akar ($\sqrt{\quad}$)
- Dalil L'Hospital $\rightarrow \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

2. Untuk $x \rightarrow \infty$ dan hasilnya $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, maka fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara:

- Membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi.
- Gunakan rumus:
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b} = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } m > n \\ \frac{a_1}{b_1}, & \text{untuk } m = n \\ 0, & \text{untuk } m < n \end{cases}$$

3. Untuk $x \rightarrow \infty$ dan hasilnya $(\infty - \infty)$, maka fungsi $f(x)$ diuraikan dengan cara:

- Kali sekawan jika $f(x)$ mengandung bentuk akar kemudian membagi pembilang dan penyebut dengan x pangkat tertinggi.
- Gunakan rumus selisih akar kuadrat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{px^2 + qx + r} \right) = \begin{cases} \infty, & \text{untuk } a > p \\ \frac{b-q}{2\sqrt{a}}, & \text{untuk } a = p \\ -\infty, & \text{untuk } a < p \end{cases}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

Untuk $x \rightarrow c$

1. Nilai $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} = \dots$

- | | |
|-------|--------|
| A. 12 | D. -10 |
| B. 10 | E. -12 |
| C. 2 | |

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+10)(x-2)}{(x-3)(x-2)} \\ &= \frac{(2+10)}{(2-3)} = -12\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - 5x + 6} \\ = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x + 8}{2x - 5} = \frac{2(2) + 8}{2(2) - 5} = -12\end{aligned}$$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} = \dots$

A. 0

D. 4

B. 1

E. 8

C. 2

Jawaban: D

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\overbrace{(\sqrt{x}-1)}^{(x-1)}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}-1} \\ = (\sqrt{1}+1)(\sqrt{1}+1) = 4\end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{x^2-1} \right) = \dots$

A. $-\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

B. $-\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{2}$

C. 0

Jawaban: D

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x+1)-2}{2(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{(x-1)}{2(x-1)(x+1)} \right) \\ &= \frac{1}{2(1+1)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

4. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x-a} = \dots$

A. a

D. a + 3

B. a + 1

E. a + 4

C. a + 2

Jawaban: D

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x-a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+3)}{(x-a)} \\ &= (a+3) \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!**Gunakan dalil L'HOSPITAL**

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 + (3-a)x - 3a}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{2x + (3-a)}{1}$$

$$= 2a + 3 - a = a + 3$$

5. Nilai $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{4 - \sqrt{5x+1}} = \dots$

- | | |
|-------|-------------|
| A. -8 | D. 8 |
| B. -6 | E. ∞ |
| C. 6 | |

Jawaban: A**SOLUSI SMART!**

- **Gunakan dalil L'HOSPITAL**

- $y = \sqrt{u} \Rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{4 - \sqrt{5x+1}} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{-\left(\frac{5}{2\sqrt{5x+1}}\right)}$$

$$= \frac{2(3)-1}{-\left(\frac{5}{2\sqrt{16}}\right)} = -8$$

6. Limit $\frac{f(a-x)-f(a)}{x} = \dots$
- A. $f'A.$ D. $-f'(x)$
 B. $-f'A.$ E. $f A.$
 C. $f'(x)$

Jawaban: B

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a-x)-f(a)}{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f'(a-x)-0}{1} = -f'(a) \end{aligned}$$

7. Diketahui fungsi g kontinu di $x = 3$ dan $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2$. Nilai

$\lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right)$ adalah

- A. $4\sqrt{3}$ D. 4
 B. $2\sqrt{3}$ E. 2
 C. $\sqrt{3}$

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(g(x) \frac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow 3} \left((2) \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})} \right) \\ = (2)(\sqrt{3}+\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

8. Jika $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{ax + b - \sqrt{x}}{x - 4} = \frac{3}{4}$, maka $a + b$ sama dengan
- A. 3
B. 2
C. 1
- D. -1
E. -2

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{Untuk } x = 4, \frac{4a + b - \sqrt{4}}{4 - 4} = \frac{0}{0}$$

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 4} \frac{a - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{1} \rightarrow a = -\frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{3}{4} \rightarrow a = 1$$

\Leftrightarrow Untuk $a = 1$ substitusikan ke pers (1), diperoleh:

$$4 + b - 2 = 0 \rightarrow b = -2$$

\Leftrightarrow Jadi, $a + b = -1$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \dots$

- A. 0
B. $\frac{2}{3}$
C. 1
- D. $\frac{3}{2}$
E. ∞

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{Misal: } p = (1+x)^{\frac{1}{6}}$$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{3}{6}} = p^3$$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{2}{6}} = p^2$$

• untuk $x \rightarrow 0$, maka $p \rightarrow 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{p^3 - 1}{p^2 - 1}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{p \rightarrow 1} \frac{(p-1)(p^2 + p + 1)}{(p-1)(p+1)} \\
 &= \frac{(1+1+1)}{(1+1)} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}}{\frac{1}{3}(1+x)^{-\frac{2}{3}}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

10. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 2$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}-1} = \dots$
- A. -4
 - B. -2
 - C. 1
 - D. 2
 - E. 4

Jawaban: A

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{1} \rightarrow g'(0) = 2 \\
 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{\sqrt{1-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}} \\
 &= \frac{g'(0)}{\frac{-1}{2\sqrt{1}}} \\
 &= \frac{2}{\frac{-1}{2\sqrt{1}}} = -4
 \end{aligned}$$

11. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}{x} = b$, maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{b+x} - \sqrt{b-x}}{x}$ sama

dengan

A. a

D. \sqrt{a}

B. $\frac{1}{\sqrt{a}}$

E. $\sqrt{\sqrt{a}}$

C. $\frac{1}{\sqrt{\sqrt{a}}}$

Jawaban: E

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{a+x}} - \left(\frac{-1}{2\sqrt{a-x}}\right)}{1} = b$$

$$\frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{2\sqrt{a}} = b \rightarrow \frac{1}{\sqrt{a}} = b$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{b+x} - \sqrt{b-x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{b}}$$

Caranya sama dengan di atas

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{a}}}} = \sqrt{\sqrt{a}}$$

Untuk $x \rightarrow \infty$

12. Nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 22x + 21}{4x^2 + 2x - 15} = \dots$

A. 5

D. $-\frac{5}{4}$

B. $\frac{5}{4}$

E. -5

C. 0

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 22x + 21}{4x^2 + 2x - 15} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(\cancel{5} - \frac{22}{x} + \frac{21}{x^2} \right)}{x^2 \left(\cancel{4} + \frac{2}{x} - \frac{15}{x^2} \right)} \\ = \frac{(5 - 0 + 0)}{(4 + 0 - 0)} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

• $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots} = \begin{cases} m > n, \text{ hasilnya} = \infty \\ m = n, \text{ hasilnya} = \frac{a_1}{b_1} \\ m < n, \text{ hasilnya} = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 22x + 21}{4x^2 + 2x - 15} \\ \bullet m = n = 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - 22x + 21}{4x^2 + 2x - 15} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

13. Nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 - x}} = \dots$

- A. 0
B. $\frac{1}{2}$
C. 1
D. 2
E. ∞

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 - x}} \\ \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(2x + 3)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} \right)} = \frac{\infty}{\sqrt{1 - 0}} = \infty \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots} = \begin{cases} m > n, \text{ hasilnya} = \infty \\ m = n, \text{ hasilnya} = \frac{a_1}{b_1} \\ m < n, \text{ hasilnya} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x}{\sqrt{x^2 - x}} = \infty \rightarrow m > n$$

14. Limit $\frac{(1-2x)^3}{(x-1)(2x^2+x+1)} = \dots$

A. -8

D. 4

B. -4

E. 8

C. $\frac{1}{2}$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)^3}{(x-1)(2x^2+x+1)}$$

pembilang dan penyebut dibagi x^3

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1-2x}{x}\right)^3}{\left(\frac{x-1}{x}\right)\left(\frac{2x^2+x+1}{x^2}\right)} \\ &= \frac{(0-2)^3}{(1-0)(2+0+0)} = \frac{-8}{2} = -4 \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

lihat koefisien pangkat tertinggi x^3 pada pembilang dan penyebut

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-2x)^3}{(x-1)(2x^2+x+1)} = \frac{(-2)^3}{2} = -4$$

15. limit $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ sama dengan

A. 2

D. $\frac{1}{3}$

B. 1

E. 0

C. $\frac{1}{2}$

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \end{aligned}$$

pembilang dan penyebut di bagi x

$$\begin{aligned} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \\ = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}} \\ = \frac{1}{1+\sqrt{0+\sqrt{0}}} \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

lihat koefisien pangkat tertinggi (\sqrt{x}) pada pembilang dan penyebut

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \frac{1}{1}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 3^{x-2} + 4^{x+1}}{2^{x-1} + 3^{x+1} + 4^{x-1}} = \dots$$

A. $\frac{1}{16}$

D. 16

B. $\frac{1}{8}$

E. 32

C. $\frac{1}{4}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 3^{x-2} + 4^{x+1}}{2^{x-1} + 3^{x+1} + 4^{x-1}}$$

pembilang & penyebut dibagi (4^x),

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{x+1} - 3^{x-2} + 4^{x+1}}{4^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot 2^{-x} - 3^{-2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4}{2^{-1} \cdot 2^{-x} + 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^x + 4^{-1}} \\ &= \frac{0 - 0 + 4}{0 + 0 + \frac{1}{4}} = 16 \end{aligned}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 14} \right) = \dots$$

A. ∞

D. 2

B. 5

E. 0

C. 4

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\underbrace{x^2 + 2x - 3}_a} - \sqrt{\underbrace{x^2 - 2x + 14}_b} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{a} - \sqrt{b} \right) \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{(x^2 + 2x - 3) - (x^2 - 2x + 14)}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{x^2 - 2x + 14}} \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}\right)} + \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{14}{x^2}\right)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{14}{x^2}} \right)}
\end{aligned}$$

pembilang dan penyebut dibagi x

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{14}{x^2}}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + 0 - 0} + \sqrt{1 - 0 + 0}} \\
&= \frac{4}{2} = 2
\end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Gunakan rumus selisih akar kuadrat:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{ax^2 + bx + c} - \sqrt{ax^2 + qx + r} \right) = \frac{b-q}{2\sqrt{a}}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 14} \right)$$

- $a = 1, b = 2$ dan $q = -2$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x - 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 14} \right)$$

$$= \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{2 - (-2)}{2\sqrt{1}} = \frac{4}{2} = 2$$

18. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(4x+5)} - 2x + 1) = \dots$
- A. 0
 B. $\frac{1}{4}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{9}{4}$
 E. ∞

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

Gunakan rumus selisih akar kuadrat:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(4x+5)} - 2x + 1) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - \sqrt{(2x-1)^2}) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 5x} - \sqrt{4x^2 - 4x + 1}) \\ &= \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{5 - (-4)}{2\sqrt{4}} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

19. Limit $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{2x}} - \sqrt{x}) = \dots$
- A. $\sqrt{2}\sqrt{2}$
 B. 2
 C. $\sqrt{2}$
 D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 E. 0

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

Gunakan rumus selisih akar kuadrat:

\Leftrightarrow Misal: $y = \sqrt{x}$, maka limit di atas menjadi:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{y^2 + \sqrt{2}y} - \sqrt{y^2})$$

$$\rightarrow a = 1, b = \sqrt{2}, \text{ dan } q = 0$$

$$= \frac{b-q}{2\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{2}-0}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

20. Limit $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x) = \dots$

A. $\frac{a-b}{2}$

D. $\frac{a+b}{2}$

B. ∞

E. $a+b$

C. 0

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x)$$

Gunakan rumus selisih akar kuadrat:

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + (a+b)x + ab} - \sqrt{x^2})$$

$$= \frac{(a+b)-0}{2\sqrt{1}} = \frac{a+b}{2}$$

21. Nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x}) = \dots$

A. $\frac{5}{2}$

D. 1

B. 2

E. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

Jawaban: C

SOLUSI SMART!

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{ax^2 + bx + c} + \sqrt{dx^2 + ex + f} + \sqrt{gx^2 + hx + i} + \dots \sqrt{\dots})$$

$$= \left(\frac{b}{2\sqrt{a}} \right) + \left(\frac{e}{2\sqrt{d}} \right) + \left(\frac{h}{2\sqrt{g}} \right) + \dots$$

Rumus ini hanya berlaku jika

$$\sqrt{a} + \sqrt{d} + \sqrt{g} + \dots = 0$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} & \left(\sqrt{4x^2 + 8x} - \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x} \right) \\ & = \left(\frac{8}{2\sqrt{4}} \right) - \left(\frac{0}{2\sqrt{1}} \right) - \left(\frac{1}{2\sqrt{1}} \right) \\ & = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

C. LIMIT FUNGSI TRIGONOMETRI

a. Langkah Umum Penyelesaian

Limit
 $x \rightarrow a$ $f(x) = \dots\dots$

- Substitusikan $x = a$ ke $f(x)$
- Jika hasilnya bentuk tak tentu $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, (\infty - \infty), \text{ dan } (0 \cdot \infty) \right)$, maka $f(x)$ harus diuraikan
- Jika hasilnya bentuk tertentu, maka itulah nilai limitnya.

b. Cara Menguraikan Fungsi $f(x)$

1. Untuk bentuk dasar, gunakan rumus:

- Limit $\frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b}$

- Limit $\frac{ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

- Limit $\frac{\tan ax}{bx} = \frac{a}{b}$

- Limit $\frac{ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

- Limit $\frac{\tan ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}$

- Limit $\frac{\sin ax}{\tan bx} = \frac{a}{b}$

2. Jika terdapat bentuk $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ dan hasilnya $\left(\frac{0}{0}\right)$ dimana $f(x)$ dan $g(x)$ mudah diturunkan gunakan cara **dalil L' Hospital**.

3. Jika terdapat bentuk **identitas trigonometri** gunakan rumus:

- $1 - \cos cx = 2 \sin^2 \frac{c}{2}x$
- $1 - \sin 2cx = \cos^2 cx$
- $1 + \cos cx = 2 \cos^2 \frac{c}{2}x$
- $1 - \cos 2cx = \sin^2 cx$
- $\sin cx = 2 \sin \frac{c}{2}x \cos \frac{c}{2}x$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

22. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \tan 2x}{3x} = \dots$

A. ∞

D. $\frac{4}{3}$

B. 0

E. $\frac{8}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\tan 2x}{3x} \right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan 3x}{x \cdot \sin x} = \dots$

A. 0

D. 6

B. $\frac{1}{6}$

E. ∞

C. 5

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x \cdot \tan 3x}{x \cdot \sin x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 2x}{x} \right) \left(\frac{\tan 3x}{\sin x} \right) = \left(\frac{2}{1} \right) \left(\frac{3}{1} \right) = 6$$

24. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x \cdot \sin 3x}{5x} = \dots$

- A. 0
 B. 0,2
 C. 0,6
 D. 1
 E. ∞

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \left(\frac{\cos 4x}{1} \right) \left(\frac{\sin 3x}{5x} \right) \right\} = \left(\frac{1}{1} \right) \left(\frac{3}{5} \right) = 0,6$$

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \operatorname{tg}^2 3x}{\sin (2x^2)} = \dots$

- A. 2
 B. $2\frac{1}{2}$
 C. -2
 D. 5
 E. -5

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \operatorname{tg}^2 3x}{\sin (2x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{\sin 2x^2} + \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{\sin 2x^2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \right) = 5 \end{aligned}$$

26. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x - \pi}{2(x - \pi) + \tan(x - \pi)} = \dots$

- A. $-\frac{1}{2}$
 B. $-\frac{1}{4}$
 C. $\frac{1}{4}$
 D. $\frac{1}{3}$
 E. $\frac{2}{5}$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{2(x - \pi) + \tan(x - \pi)} \\ \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(x - \pi)}{2(x - \pi) + \tan(x - \pi)} \\ & \bullet \text{ pembilangan dan penyebut dibagi } (x - \pi) \\ & = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2 + \frac{\tan(x - \pi)}{(x - \pi)}} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L' HOSPITAL

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1}{2 + \sec^2(x - \pi)} = \frac{1}{2 + 1} = \frac{1}{3}$$

27. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi(\pi - 2x) \tan(x - \frac{\pi}{2})}{2(x - \pi) \cos^2 x} = \dots$

- A. -2
B. -1
C. $\frac{1}{2}$
D. 1
E. 2

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\pi(\pi - 2x) \tan(x - \frac{\pi}{2})}{2(x - \pi) \cos^2 x} \\ & = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2\pi}{2(x - \pi)} \right) \left(\frac{(\frac{\pi}{2} - x) \tan - (\frac{\pi}{2} - x)}{\sin^2(\frac{\pi}{2} - x)} \right) \\ & = \left(\frac{2\pi}{2(-\frac{\pi}{2})} \right) \left(\frac{(1)(-1)}{(1)^2} \right) \\ & = (-2) \cdot (-1) = 2 \end{aligned}$$

28. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1-x^2) \cdot \cos(1-x^2)}{x^2-1} = \dots$

- A. 1
 B. -1
 C. 2
 D. -2
 E. 0

Jawaban: B

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(1-x^2) \cdot \cos(1-x^2)}{x^2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1} \underbrace{\left(\frac{\sin(1-x^2)}{-(1-x^2)} \right)}_{-1} \underbrace{\cos(1-x^2)}_1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

29. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{1-\sqrt{1-x}} = \dots$

- A. 8
 B. 6
 C. 4
 D. -6
 E. -8

Jawaban: A

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L ' Hospital

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{1-\sqrt{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cdot \cos 4x}{\left(0 - \frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow y} \frac{\tan x - \tan y}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) \cdot (1 + \tan x \cdot \tan y)} = .$$

- A. -1
B. 1
C. 0

- D. y
E. -y

Jawaban: E

Catatan : $\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow y} \left\{ \frac{1}{\left(\frac{y-x}{y}\right)} \right\} \left(\frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y} \right) \\ = \lim_{x \rightarrow y} \left(\frac{y}{1} \right) \left(\frac{\operatorname{tg}(x - y)}{-(x - y)} \right) \\ = (y)(-1) = -y \end{aligned}$$

$$31. \text{Nilai } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \tan 3x}{1 - \cos 6x} = \dots$$

- A. 0
B. $\frac{5}{9}$
C. $\frac{5}{6}$

- D. $\frac{5}{3}$
E. ∞

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \tan 3x}{1 - \cos 6x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x \cdot \tan 3x}{2 \sin^2 3x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5x}{2 \sin 3x} \right) \cdot \left(\frac{\tan 3x}{\sin 3x} \right) \\ = \left(\frac{5}{6} \right) \cdot \left(\frac{3}{3} \right) = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

32. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ maka $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{3}\pi + h) - \sin\frac{1}{3}\pi}{h} = \dots$

- A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- B. $-\frac{1}{2}$
- C. $\frac{1}{2}$
- D. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
- E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

Jawaban: C

Gunakan rumus: $\sin A - \sin B = 2\cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{1}{3}\pi + h) - \sin\frac{1}{3}\pi}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{1}{2}(\frac{1}{3}\pi + h) \cdot \sin\frac{1}{2}h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos \frac{1}{3}\pi \cdot \sin\frac{1}{2}h}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(\frac{1}{2}) \cdot \sin\frac{1}{2}h}{h} = \frac{1 \cdot (\frac{1}{2})}{1} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

Gunakan dalil L'HOSPITAL

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{1}{3}\pi + h) - 0}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$$

33. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot \cos 8x - \tan 2x}{16x^3} = \dots$

- A. -4
- B. -6
- C. -8
- D. -16
- E. -32

Jawaban: A

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot \cos 8x - \tan 2x}{16x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot (\cos 8x - 1)}{16x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot (-2 \cdot \sin^2 4x)}{16x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-2) \cdot \left(\frac{\tan 2x}{2x} \right) \cdot \left(\frac{\sin^2 4x}{8x^2} \right) \\ &= (-2) \cdot (1) \cdot \left(\frac{16}{8} \right) = -4 \end{aligned}$$

34. Jika diketahui $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = 1$, maka nilai a dan b yang

memenuhi adalah

A. $a = \frac{1}{2}, b = 0$

D. $a = 1, b = -1$

B. $a = 1, b = 1$

E. $a = 1, b = 0$

C. $a = \frac{1}{2}, b = 0$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ax \sin x + b}{\cos x - 1} = 1$$

• untuk $x = 0 \rightarrow \frac{0}{0} = \frac{0+b}{1-1} \rightarrow b = 0$

• **gunakan L'Hospital :**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \cdot (\sin x) + ax \cdot (\cos x)}{-\sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[-a - \underbrace{\left(\frac{ax}{\tan x} \right)}_a \right]$$

$$-a - a = 1 \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

LATIHAN SOAL 19

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Nilai $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 14x + 8}{x^2 - 3x - 4} = \dots$

- A. 4
- B. 2
- C. $\frac{1}{2}$

- D. -2
- E. -4

2. Limit $\frac{(3x-1)^2 - 4}{x^2 + 4x - 5} = \dots$

- A. 0
- B. 1
- C. 2

- D. 4
- E. 8

3. Limit $\left(\frac{2x^2 - 8}{x - 2} + \frac{x^2 - 2x}{2x - 4} \right) = \dots$

- A. 5
- B. 6
- C. 8

- D. 9
- E. ∞

4. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} = \dots$
- A. 0
B. 3
C. 6
D. 12
E. 15
5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x} - 2\sqrt{x} - 2\sqrt{2} + x\sqrt{2}}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} = \dots$
- A. 0
B. 2
C. 4
D. 8
E. 10
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}{(x-1)^2} = \dots$
- A. 0
B. $\frac{1}{3}$
C. $\frac{1}{5}$
D. $\frac{1}{7}$
E. $\frac{1}{9}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{\sqrt{1+2x} - \sqrt{1-2x}} = \dots$
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 4
E. ∞
8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2n} - x}{1-x} = \dots$
- A. $2n - 1$
B. $1 - 2n$
C. $2n$
D. $2n - 2$
E. $2n + 2$

9. Limit $\frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a \rightarrow b} \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \dots$
- A. 0
B. 3a
C. $\sqrt[3]{b}$
D. 3b
E. ∞
10. Limit $\frac{1}{x \rightarrow 3} \left\{ \frac{1}{(x-3)} - \frac{2}{x-11} \right\} = \dots$
- A. $-\frac{1}{24}$
B. $-\frac{1}{32}$
C. 0
D. $\frac{1}{32}$
E. $\frac{1}{24}$
11. Diketahui $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)g(x) - 3g(x) + f(x) - 3}{(f(x) - 3)(x - 5)} = 0$. Nilai $g'(5)$ adalah
- A. -5
B. -3
C. 0
D. 3
E. 5
12. Jika $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) - 3g(x)\} = 2$ dan $\lim_{x \rightarrow a} \{3f(x) + g(x)\} = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \cdot g(x)\} = \dots$
- A. $-\frac{1}{2}$
B. $-\frac{1}{4}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 1
13. Diketahui suku banyak $g(x) = ax^2 + (a-b)x + a$ habis dibagi $(x - 1)$.
Jika $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^2 - 2x + 1} = \frac{1}{3}$, maka nilai $(a + b)$ adalah
- A. $-\frac{4}{3}$
B. $-\frac{2}{3}$
C. 0
D. $\frac{2}{3}$
E. $\frac{4}{3}$

14. Nilai $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 7x^2}{2x^4 + 5x} = \dots$

A. $\frac{3}{2}$

D. $-\frac{7}{3}$

B. $\frac{3}{5}$

E. $-\frac{7}{2}$

C. $-\frac{7}{5}$

15. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{2x^2+4x+5}$ adalah

A. 0

D. 1

B. $\frac{8}{11}$

E. 6

C. $\frac{3}{4}$

16. Limit $\left(\frac{x+3}{2x-1} - \frac{2x+5}{x-7} \right) = \dots$

A. $-\frac{1}{2}$

D. $-\frac{2}{3}$

B. $-\frac{2}{2}$

E. $-\frac{5}{3}$

C. $-\frac{3}{2}$

17. Limit $\frac{\sqrt{12x^2 - 4x + 1} + 2\sqrt{x^2}}{x - 2006} = \dots$

A. $2\sqrt{3}$

D. $2(\sqrt{3}-1)$

B. $\sqrt{3}+1$

E. $2(\sqrt{3}+1)$

C. $\sqrt{3}-1$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6^x}{2^x + 4^x} = \dots$

A. 0

D. 3

B. 1

E. ∞

C. $\frac{3}{2}$

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 2} - \sqrt{x^2 + 2x + 5}) = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$
 - B. $-\frac{1}{2}$
 - C. 0
 - D. -1
 - E. $-\infty$

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} ((3x - 2) - \sqrt{9x^2 - 2x + 5}) = \dots$
- A. 0
 - B. $-\frac{1}{3}$
 - C. -1
 - D. $-\frac{4}{3}$
 - E. $-\frac{5}{3}$

21. Nilai dari $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x} - x - 2)$ adalah
- A. ∞
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. 0
 - D. $-\frac{9}{2}$
 - E. $-\frac{1}{2}$

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{2015x + \sqrt{2015x}} - \sqrt{2015x - \sqrt{2015x}} \right\} = \dots$
- A. 0
 - B. 1
 - C. 2015
 - D. $\sqrt{2015}$
 - E. $2\sqrt{2015}$

23. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\sqrt{25 - \frac{10}{x}} - \sqrt{25 + \frac{10}{x}} \right) = \dots$
- A. -2
 - B. -1
 - C. 0
 - D. 1
 - E. ∞

24. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 - 2x^2} - x - 1) = \dots$
- A. $\frac{5}{3}$
 - B. $\frac{2}{3}$
 - C. $\frac{1}{3}$
 - D. $-\frac{2}{3}$
 - E. $-\frac{5}{3}$

SOAL LATIHAN - 2

25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin \frac{1}{2}x}{\tan \frac{1}{3}x} = \dots$
- A. 0
 - B. $3\frac{1}{3}$
 - C. $4\frac{1}{2}$
 - D. 6
 - E. 9
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x \cdot \sin^2 8x}{x^2 \sin 4x} = \dots$
- A. 32
 - B. 24
 - C. 16
 - D. 8
 - E. 4
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \tan 5x}{\cos 2x \cdot \cos 7x} = \dots$
- A. $\frac{1}{9}$
 - B. $-\frac{1}{9}$
 - C. $\frac{2}{9}$
 - D. $-\frac{2}{9}$
 - E. 0
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \dots$
- A. $\frac{1}{4}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. 1
 - D. 2
 - E. 4

29. Limit $\frac{\sin(2x - \pi)}{\sqrt{x} - \sqrt{\frac{\pi}{2}}} = \dots$
 $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$
- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D. $\sqrt{2}$
 B. 1 E. $2\sqrt{2}$
 C. 2
30. Jika $\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{a}{bx}\right) = b$, a dan b konstanta, maka
- A. $a = \frac{1}{2}b$ D. $a = b^2$
 B. $a = b$ E. $a = 2b$
 C. $a^2 = b$
31. Limit $\frac{x^a \sin^4 x}{\sin x^6} = 1$, maka $a = \dots$
 $x \rightarrow 0$
- A. 1 D. 4
 B. 2 E. 5
 C. 3
32. Limit $\frac{(x-1)(x-3) \cdot \sin(x-1)}{\{(x-1)(x+2)\}^2} = \dots$
 $x \rightarrow 1$
- A. $-\frac{2}{9}$ D. $\frac{2}{3}$
 B. $-\frac{2}{3}$ E. $\frac{4}{9}$
 C. 0
33. Limit $\frac{x-k}{\sin(x-k) + 2k-2x} = \dots$
 $x \rightarrow k$
- A. -1 D. $\frac{1}{2}$
 B. 0 E. 1
 C. $\frac{1}{3}$

34. Jika diketahui $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \operatorname{tg} x = \dots$
- A. 0
B. ∞
C. 1
- D. $\frac{1}{2}$
E. 2
35. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x^2)}{x^2 + \sin^2 3x} = \dots$
- A. $\frac{2}{3}$
B. 5
C. $\frac{3}{2}$
- D. 0
E. $\frac{1}{5}$
36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sin(2 - \sqrt{x+3})} = \dots$
- A. -12
B. -6
C. 0
- D. 6
E. 12
37. Diketahui $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 - 1}{x - 1} + \frac{\cos(\frac{\pi}{2} - x + 1)}{x - 1} \right) = \dots$
- A. 0
B. 1
C. 2
- D. 3
E. 4
38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x \operatorname{tg} 2x - x^2}{x \operatorname{tg}^2 3x} = \dots$
- A. $\frac{23}{9}$
B. $\frac{19}{9}$
C. $\frac{17}{9}$
- D. $\frac{8}{9}$
E. 0

39. Limit $\frac{\cos^2(\pi-x)}{x \rightarrow \frac{\pi}{2} (2x-\pi) \cdot \tan(\frac{\pi}{2}-x)} = \dots$
- A. -1
B. 1
C. $-\frac{1}{2}$
D. $\frac{1}{2}$
E. 0
40. Jika $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ maka $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin 3x \cos 2x}{4x^3} = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{4}$
D. $\frac{3}{2}$
E. 3
41. Limit $\frac{(t^2 - 5t + 6) \sin(t-2)}{t \rightarrow 2 (t^2 - t - 2)^2} = \dots$
- A. $\frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{9}$
C. 0
D. $-\frac{1}{9}$
E. $-\frac{1}{3}$
42. Limit $\frac{x^3 - (a+1)x^2 + ax}{x \rightarrow 1 (x^2 - a) \cdot \text{tg}(x-1)} = \dots$
- A. 1
B. $1 - a$
C. a
D. 0
E. $2 - a$
43. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin 3x}{1 - \cos 6x} = \dots$
- A. -1
B. $\frac{1}{3}$
C. 0
D. $-\frac{1}{3}$
E. 1

44. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \operatorname{tg} x} - \frac{\cos^2 x}{x \sin x} \right) = \dots$
- A. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{4}$
 B. $\frac{1}{4}$ E. $-\frac{1}{2}$
 C. 0
45. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin\left(1 - \frac{1}{x}\right) \cos\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x-1)} = \dots$
- A. -1 D. $\frac{1}{2}$
 B. $-\frac{1}{2}$ E. 1
 C. 0
46. Jika $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = 1$, maka $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2(x-1)}{4(x^2 - 2x + 1)} = \dots$
- A. 0 D. 1
 B. $\frac{1}{4}$ E. ∞
 C. $\frac{1}{2}$
47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2\sin 2x + 1} - (1 + \sin x)}{x} = \dots$
- A. $\frac{3}{2}$ D. 2
 B. 1 E. 0
 C. $-\frac{3}{2}$
48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \sin 6x + \sin 10x - \sin 18x}{3\sin x - \sin 3x} = \dots$
- A. 0 D. 192
 B. $\frac{11}{3}$ E. 212
 C. 54

49. Nilai $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ adalah

A. 2

D. -1

B. 1

E. -2

C. 0

50. Limit $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - \cos(\pi - 2x)}}{|x - \frac{\pi}{2}|} = \dots$

A. 1

D. $\sqrt{2}$

B. -1

E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

C. 0



TURUNAN FUNGSI

20

A. RUMUS TURUNAN FUNGSI & SIFATNYA

a. Turunan Pertama Fungsi $y = f(x)$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

b. Rumus Turunan Fungsi Aljabar (a dan n adalah Konstanta)

- $y = a.x^n \rightarrow y' = a.n.x^{n-1}$
- $y = a.U^n \rightarrow y' = \{a.n.x^{n-1}\}.U'$ dengan $U = g(x)$

c. Rumus Turunan Fungsi Trigonometri

- $y = a \sin x \rightarrow y' = a \cos x$
- $y = a \cos x \rightarrow y' = -a \sin x$
- $y = a \tan x \rightarrow y' = a \sec^2 x$
- $y = a \cotan x \rightarrow y' = -\operatorname{cosec}^2 x$
- $y = a \sec x \rightarrow y' = \sec x \tan x$
- $y = a \operatorname{cosec} x \rightarrow y' = -\operatorname{cosec} x \cotan x$

Jika $U = g(x)$, rumusnya:

- $y = a \sin U \rightarrow y' = \{a \cos U\}.U'$
- $y = a \cos U \rightarrow y' = \{-a \sin U\}.U'$

- $y = a \tan U \quad \rightarrow \quad y' = \{a \sec^2 U\} \cdot U'$
- $y = a \cotan U \quad \rightarrow \quad y' = \{- \operatorname{cosec}^2 U\} \cdot U'$
- $y = a \sec U \quad \rightarrow \quad y' = \{\sec U \tan U\} \cdot U'$
- $y = a \operatorname{cosec} U \quad \rightarrow \quad y' = \{- \operatorname{cosec} U \cotan U\} \cdot U'$

d. Sifat–sifat Turunan

Untuk $U = g(x)$, $V = h(x)$, dan $c = \text{konstanta}$, maka:

- $y = c \quad \rightarrow \quad y' = 0$
- $y = c \cdot U \quad \rightarrow \quad y' = c \cdot U'$
- $y = U \pm V \quad \rightarrow \quad y' = U' \pm V'$
- $y = U \cdot V \quad \rightarrow \quad y' = U' \cdot V + U \cdot V'$
- $y = \frac{U}{V} \quad \rightarrow \quad y' = \frac{U' \cdot V - U \cdot V'}{V^2}$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

FUNGSI ALJABAR

1. Ditentukan $f(x) = \frac{1}{5x^3}$, maka $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \dots$

A. $-\frac{15}{x^4}$

D. $-\frac{15}{x^2}$

B. $-\frac{3}{5x^4}$

E. $-\frac{1}{15x^2}$

C. $-\frac{3}{5x^2}$

Jawaban: B

- $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = f'(x)$
- $y = a \cdot U^n \rightarrow y' = a \cdot n U^{n-1}$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{5x^3} = \frac{1}{5} \cdot x^{-3}$$

$$f'(x) = \frac{-3}{5} \cdot x^{-4} = -\frac{3}{5x^4}$$

2. Jika $f(x) = (x - 1)(x - 2)(x + 1)$, maka turunan fungsi f adalah $f'(x) =$

....

A. $3x^2 - 4x - 1$

D. $3x^2 - 3x + 1$

B. $3x^2 + 4x - 1$

E. $3x^2 + 3x + 1$

C. $3x^2 + 4x + 1$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{(x-1)(x+1)}_{(x^2-1)} \cdot (x-2)$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - x = x + 2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 1$$

3. Nilai dari $f'(2)$ untuk $f(x) = (5 - 3x)^{10}$ adalah

A. -30

D. 60

B. -10

E. 90

C. 30

Jawaban: C

- $y = a \cdot U^n \rightarrow = \{ a \cdot n \cdot U^{n-1} \} \cdot U'$

$$\Leftrightarrow f(x) = (5 - 3x)^{10}$$

$$f(x) = (10)(5 - 3x)^9 \cdot (-3)$$

$$= -30(5 - 3x)^9$$

$$\Leftrightarrow f'(2) = -30(5 - 6)^9 = 30$$

4. Turunan pertama dari fungsi $f(x) = 4\sqrt{2x^3 - 1}$ adalah $f'(x) =$

A. $\frac{4}{x^2\sqrt{2x^3 - 1}}$

D. $\frac{12x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$

B. $\frac{12}{x^2\sqrt{2x^3 - 1}}$

E. $\frac{24x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$

C. $\frac{6x}{\sqrt{2x^3 - 1}}$

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

$$\bullet \quad y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\Leftrightarrow F(x) = 4\sqrt{2x^3 - 1}$$

$$F'(x) = 4 \left(\frac{6x^2}{2\sqrt{2x^3 - 1}} \right) = \frac{12x^2}{\sqrt{2x^3 - 1}}$$

5. Jika $f(x) = g(x) \cdot \sqrt{x}$, $g(4) = 8$, $g'(4) = 7$, maka $f'(4) = \dots$

A. 4

D. 16

B. 8

E. 20

C. 12

Jawaban: D

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow f(x) = \underbrace{g(x)}_u \cdot \underbrace{\sqrt{x}}_v$$

$$f'(x) = u'v + uv'$$

$$= g'(x) \cdot \sqrt{x} + g(x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(4) = g'(4) \cdot \sqrt{4} + g(4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}}$$

$$= (7)(2) + (8) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = 16$$

6. Jika $f\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = 4 - 2x + x^2$, maka $f'(1) = \dots$

- A. -20
 B. -17
 C. -10
 D. -5
 E. 0

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \text{misal: } g(x) = 3 + \frac{1}{2}x = y$$

$$\frac{1}{2}x = y - 3$$

$$x = 2y - 6$$

$$g^{-1}(x) = 2x - 6$$

$$\Leftrightarrow \left(3 + \frac{1}{2}x\right) = f \circ g(x)$$

$$= 4 - 2x + x^2$$

$$f(x) = 4 - 2\{g^{-1}(x)\} + \{g^{-1}(x)\}^2$$

$$f(x) = 4 - 3(2x - 6) + (2x - 6)^2$$

$$f(x) = 4x^2 - 28x + 52$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = 8x - 28$$

$$f'(1) = 8(1) - 28 = -20$$

SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow f\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = 4 - 2x + x^2$$

$$\frac{1}{2}f'\left(3 + \frac{1}{2}x\right) = -2 + 2x$$

ketika $x = -4 \rightarrow \frac{1}{2}f'(1) = -2 - 8$

$$f'(1) = -20$$

7. Jika $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$ dengan $f(0) = 0$ dan $f'(0) = 2$, maka $g'(0) = \dots$

- A. 0
 B. 2
 C. 4
 D. 8
 E. 16

Jawaban: D

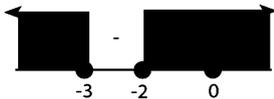
SOLUSI SMART!

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow g(x) &= (f \circ f \circ f)(x) \\ g'(x) &= \{f'(f \circ f(x))\} \cdot \{f'(f(x))\} \cdot f'(x) \\ g'(0) &= \{f'(f \circ f(0))\} \cdot \{f'(f(0))\} \cdot f'(0) \\ g'(0) &= \{f'(f(0))\} \cdot \{f'(0)\} \cdot f'(0) \\ g'(0) &= \underbrace{\{f'(0)\}}_2 \cdot \underbrace{\{f'(0)\}}_2 \cdot \underbrace{\{f'(0)\}}_2 = 8\end{aligned}$$

8. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{4}x^4$ dengan $x \rightarrow \mathbb{R}$. Nilai-nilai x yang memenuhi $4f(x) + 5f'(x) + 2f''(x) \geq 0$ adalah
- A. $-3 \leq x \leq -2$ atau $x \geq 0$ D. $-3 \leq x \leq -2$
B. $x \leq -3$ atau $-2 \leq x \leq 0$ E. $-2 \leq x \leq 0$
C. $x \geq -2$ atau $x \leq -3$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow f(x) &= \frac{1}{4}x^4 \rightarrow f'(x) = x^3 \\ &\qquad\qquad\qquad f''(x) = 3x^2 \\ \Leftrightarrow 4f(x) + 5f'(x) + 2f''(x) &\geq 0 \\ x^4 + 5x^3 + 6x^2 &\geq 0 \\ x^2(x^2 + 5x + 6) &\geq 0 \\ x^2(x+2)(x+3) &\geq 0\end{aligned}$$



\Leftrightarrow Nilai x yang memenuhi adalah $x \geq -2$ atau $x \leq -3$

FUNGSI TRIGONOMETRI

9. Turunan pertama dari $Y = \frac{1}{4} \sin 4x$ adalah
- A. $Y' = \frac{1}{4} \cos 4x$ D. $Y' = \cos x$
B. $Y' = \cos 4x$ E. $Y' = 4 \cos 4x$
C. $Y' = \frac{1}{4} \cos x$

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow Y = \frac{1}{4} \sin 4x$$

$$\begin{aligned} Y' &= \frac{1}{4} \cdot (4) \cdot \cos 4x \\ &= \cos 4x \end{aligned}$$

10. Jika $y = 3 \sin 2x - 2 \cos 3x$, maka $\frac{dy}{dx} = \dots$

A. $6 \cos 2x + 6 \sin 3x$

D. $3 \cos 2x + 2 \sin 3x$

B. $-6 \cos 2x - 6 \sin 3x$

E. $3 \cos 2x - 2 \sin 3x$

C. $6 \cos 2x - 6 \sin 3x$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow y = 3 \sin 2x - 2 \cos 3x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6 \cos 2x + 6 \sin 3x$$

11. Turunan dari fungsi f yang rumusnya $f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$ adalah $f'(x) =$

....

A. $2x \cos 2x + 2x^2 \sin 2x$

D. $x^2 \cos 2x + x^2 \sin 2x$

B. $-2x^2 \sin 2x - 2x \cos 2x$

E. $2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x$

C. $x^2 \sin 2x + 2x \cos 2x$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow f(x) = x^2 \cdot \cos 2x$$

$$u = x^2 \rightarrow u' = 2x$$

$$= \cos 2x \rightarrow v' = -2 \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow F' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$F'(x) = 2x \cdot \cos 2x + x^2 (-2 \sin 2x)$$

$$= 2x \cos 2x - 2x^2 \sin 2x$$

12. Jika $f(x) = \sin^2(2x + \frac{\pi}{6})$, maka nilai dari $f'(0) = \dots$

A. $2\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$

B. 2

E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \text{misal: } u = 2x + \frac{\pi}{6} \rightarrow u' = 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sin^2 \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f(x) = (\sin u)^2$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = \underbrace{2 \cdot \sin u \cdot \cos u}_{\sin 2u} \cdot u'$$

$$f'(x) = 2 \cdot \sin 2 \left(2x + \frac{\pi}{6} \right)$$

$$f'(0) = 2 \sin \frac{2\pi}{6}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} \sqrt{3} \right) = \sqrt{3}$$

13. $y = \sin(\sin(\sin \dots \sin(\sin x)))$. Tentukan $\frac{dy}{dx}$ pada $x = 0$!

A. $-\infty$

D. 1

B. -1

E. ∞

C. 0

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow f(x) = \sin x \rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f'(0) = \cos 0 = 1$$

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

$$f'(x) = \cos(\sin x) \cdot (\cos x)$$

$$f'(0) = \cos(0) \cdot (1) = 1$$

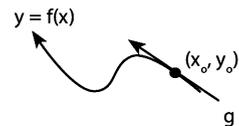
$$\Leftrightarrow f(x) = \sin(\sin(\sin \dots \sin(\sin x) \dots))$$

$$f'(0) = 1$$

B. APLIKASI TURUNAN

a. Menentukan Gradien Garis Singgung Kurva

- Gradien garis g adalah $m = f'(x_0)$
- Persamaan garis g adalah $y - y_0 = m(x - x_0)$



b. Menentukan Interval Fungsi Naik Dan Fungsi Turun Sebuah Kurva

- $f'(x) > 0 \rightarrow$ fungsi $y = f(x)$ naik
- $f'(x) < 0 \rightarrow$ fungsi $y = f(x)$ turun

c. Menentukan Nilai Stasioner Fungsi

- Fungsi $y = f(x)$ dalam keadaan stasioner pada saat $f'(x) = 0$.
- Jenis–Jenis titik stasioner:
 - titik balik maksimum \rightarrow syarat: $f'(x) = 0, f''(x) < 0$
 - titik balik minimum \rightarrow syarat: $f'(x) = 0, f''(x) > 0$
 - titik belok dibedakan sebagai berikut.
 - titik belok horizontal \rightarrow syarat: $f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$
 - titik belok normal \rightarrow syarat: $f'(x) \neq 0, f''(x) = 0, f'''(x) \neq 0$
- Nilai maksimum/minimum kurva $y = f(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$.
 - hitung nilai stasioner $y = f(x)$ dalam interval $a \leq x \leq b$
 - hitung nilai $y = fA$. dan $y = fB$.
 - dari nilai–nilai tersebut, cari yang terbesar (nilai maks) dan yang terkecil (min)

d. Menyelesaikan Soal-soal Terapan

Langkah umum untuk menentukan problem maksimum dan minimum pada soal terapan:

- Perhatikan yang dimaksimum–minimumkan.
- Buat persamaan agar fungsi yang dimaksimum–minimumkan menjadi satu variabel dengan cara substitusi/eliminasi.
- Tentukan keadaan stasioner fungsi untuk menentukan nilai maksimum dan minimum.

GARIS SINGGUNG

14. Garis singgung kurva $y = 5x^2 + 4x - 1$ yang melalui titik $(1, 8)$, memotong sumbu Y di titik

- A. $(0, -9)$
- B. $(0, -8)$
- C. $(0, -6)$
- D. $(0, 7)$
- E. $(0, 22)$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow f(x) = 5x^2 + 4x - 1$$

$$f'(x) = 10x + 4$$

$$m = f'(1) = 10 + 4 = 14$$

\Leftrightarrow Persamaan garis singgung kurva di titik $(1, 8)$ dengan gradien $(m) = 14$ adalah $y - 8 = 14(x - 1)$

\Leftrightarrow Syarat memotong sumbu Y $\rightarrow x = 0$

$$y - 8 = 14(0 - 1) \rightarrow y = -6$$

\Leftrightarrow Jadi, titik potongnya di $(0, -6)$

15. Persamaan garis singgung yang melalui titik berabsis 1 pada kurva $y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$, adalah

- A. $5x + 2y + 5 = 0$
- B. $5x - 2y - 5 = 0$
- C. $5x + 2y - 5 = 0$
- D. $3x + 2y - 3 = 0$
- E. $3x - 2y - 3 = 0$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{x^2} - \sqrt{x}$$

$$x_0 = 1 \rightarrow y_0 = \frac{1}{(1)^2} - \sqrt{1} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = x^{-2} - \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{-2}{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Gradien garis singgung adalah:

$$m = f'(1) = \frac{-2}{(1)^3} - \frac{1}{2\sqrt{1}} = -\frac{5}{2}$$

⇔ Persamaan garis singgung di titik (1,0) dengan $m = -\frac{5}{2}$ adalah:

$$y - 0 = -\frac{5}{2}(x-1) \rightarrow \text{dikalisilang}$$

$$2y = -5x + 5 \rightarrow 5x + 2y - 5 = 0$$

16. Jika garis l melalui titik $(1, -\frac{3}{2})$ dan menyinggung grafik $y = \frac{1}{2}x^2$ di kuadran pertama pada titik $(a, \frac{1}{2}x^2)$, maka nilai a adalah

A. 1

D. 4

B. 2

E. 5

C. 3

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2$$

$$x_0 = a \rightarrow y_0 = \frac{1}{2}a^2$$

$$y' = x \rightarrow m = f'(a) = x_0 = a$$

⇔ Persamaan garis singgungnya adalah $y - y_0 = m(x - x_0)$

$$\text{melalui } (1, -\frac{3}{2}) \rightarrow -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}a^2 = a(1 - a)$$

$$-3 - a^2 = 2a - 2a^2$$

$$a^2 - 2a - 3 = 0$$

$$(a - 3)(a + 1) = 0$$

⇔ Nilai a yang memenuhi di kuadran I adalah $a = 3$

17. Jika garis g menyinggung kurva $y = \sin x + \cos x$ di titik yang absisnya $\frac{1}{2}\pi$, maka garis g memotong sumbu y di titik

A. $(0, \frac{1}{2}\pi)$

D. $(0, 1 + \frac{1}{2}\pi)$

B. $(0, 1)$

E. $(0, \pi)$

C. $(0, 1 - \frac{1}{2}\pi)$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow y = f(x) = \sin x + \cos x$$

$$x_0 = \frac{1}{2}\pi \rightarrow y_0 = f(\frac{1}{2}\pi)$$

$$= \sin \frac{1}{2}\pi + \cos \frac{1}{2}\pi$$

$$= 1$$

$$f'(x) = \cos x - \sin x$$

$$\Leftrightarrow \text{Gradien garis singgung kurva pada absis } \frac{1}{2}\pi \text{ adalah } mg = f'(\frac{1}{2}\pi) = \cos \frac{1}{2}\pi - \sin \frac{1}{2}\pi = -1$$

\Leftrightarrow Persamaan garis singgung g di (x_0, y_0) dengan gradien m adalah:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

$$y - 1 = -1(x - \frac{1}{2}\pi)$$

$$\Leftrightarrow \text{Memotong sumbu } y \text{ ketika } x = 0 \rightarrow y = 1 + \frac{1}{2}\pi$$

18. Jika garis singgung pada parabola $y = ax^2 + bx + (a + b)$ di titik $(1, -1)$ sejajar dengan garis $2x + y = 1$, maka $a = \dots$

A. 1

D. -1

B. 0

(E) $-\frac{3}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow y = ax^2 + bx + (a + b)$$

kurva melalui titik $(1, -1)$

$$-1 = a + b + (a + b)$$

$$-1 = 2a + 2b \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow y = ax^2 + bx + (a + b)$$

$$y' = 2ax + b$$

$$\Leftrightarrow 2x + y = 1 \rightarrow m = -2$$

$$\text{karena sejajar } (//) \rightarrow m_1 = m_2 = -2$$

$$\Leftrightarrow \text{Gradien garis singgung kurva di titik } (1, -1) \text{ adalah}$$

$$m = f'(1) - 2 = 2a(1) + b$$

$$-2 = 2a + b \quad \dots(2)$$

$$\Leftrightarrow \text{Jika pers (1) - (2), maka:}$$

$$1 = b \rightarrow (2) \rightarrow -2 = 2a + 1$$

$$a = -\frac{3}{2}$$

19. Persamaan garis yang menyinggung parabola $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$ dan tegak lurus garis $x + 2y + 10 = 0$ adalah \dots

A. $2x - y + 1 = 0$

D. $2x + y - 2 = 0$

B. $2x + y + 2 = 0$

E. $x + 2y - 2 = 0$

C. $2x - y + 2 = 0$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow x + 2y + 10 = 0 \rightarrow m_1 = -\frac{1}{2}$$

$$\text{karena } \perp \rightarrow m_2 = 2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x$$

$$f'(x) = -x + 4$$

$$\Leftrightarrow m = f'(x_0)$$

$$2 = -x + 4 \rightarrow x_0 = 2$$

$$y_0 = f(2)$$

$$= -\frac{1}{2}(2)2 + 4(2) = 6$$

\Leftrightarrow Persamaan garis di titik (2, 6) dengan gradien 2 adalah:

$$y - 6 = 2(x - 2) \rightarrow 2x - y + 2 = 0$$

FUNGSI NAIK/TURUN

20. Grafik dari $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 20$ naik untuk interval

A. $3 < x < -2$

D. $x < 2$ atau $x > -3$

B. $-2 < x < 3$

E. $x < -3$ atau $x > -2$

C. $x < -2$ atau $x > 3$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 12x + 20$$

$$\Leftrightarrow \text{Kurva naik ketika } f'(x) > 0$$

$$2x^2 - 2x - 12x > 0$$

$$2(x - 3)(x + 2) > 0$$

$$x < -2 \text{ atau } x > 3$$

$$\Leftrightarrow \text{Kurva naik pada interval: } x < -2 \text{ atau } x > 3$$

21. Grafik fungsi $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ hanya turun pada interval $-1 < x < 5$. Nilai $a + b = \dots$

A. -21

D. 21

B. -9

E. 14

C. 9

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

\Leftrightarrow Kurva turun ketika $f'(x) < 0$

$$3x^2 + 2ax + b < 0 \quad \dots(1)$$

$f(x)$ turun dalam interval $-1 < x < 5$

$$3(x + 1)(x - 5) < 0 \quad \dots(2)$$

\Leftrightarrow Dari keadaan tersebut di atas maka:

$$\text{pers (1) = pers (2)}$$

$$3x^2 + 2ax + b = 3(x + 1)(x - 5)$$

$$3x^2 + 2ax + b = 3x^2 - 12x - 15$$

$$\bullet 2a = -12 \rightarrow a = -6$$

$$\bullet b = -15$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai } a + b = -6 - 15 = -21$$

22. Diketahui $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 13$. Jika $g(x) = f(1 - x)$, maka kurva g naik pada

A. $-3 \leq x \leq 1$

D. $-4 \leq x \leq 0$

B. $-1 \leq x \leq 3$

E. $-3 \leq x \leq 3$

C. $1 \leq x \leq 3$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 13$$

$$g(x) = f(1 - x) = \frac{1}{3}(1 - x)^3 + (1 - x)^2 + 13$$

\Leftrightarrow Syarat $g(x)$ naik adalah:

$$g'(x) > 0 \rightarrow -(1 - x)^2 - 2(1 - x) > 0$$

$$(1 - x)^2 + 2(1 - x) < 0$$

$$(1 - x) \{(1 - x) + 2\} < 0$$

$$-2 < (1 - x) < 0$$

$$-3 < -x < -1$$

$$1 < x < 3$$

23. Grafik fungsi $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + 25$ turun, jika

- A. $b^2 - 4ac < 0$ dan $a > 0$ D. $b^2 - 3ac < 0$ dan $a > 0$
 B. $b^2 - 4ac < 0$ dan $a < 0$ E. $b^2 - 3ac < 0$ dan $a < 0$
 C. $b^2 - 3ac > 0$ dan $a < 0$

Jawaban: E

$\Leftrightarrow f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + 25$

\Leftrightarrow Syarat fungsi turun:

$$f'(x) < 0 \rightarrow \underbrace{3ax^2 - 2bx + c}_{\text{definit negatif}} < 0$$

Syarat definit negatif:

• $a < 0 \rightarrow 3a < 0 \rightarrow a < 0$... (1)

• $D < 0 \rightarrow (-2b)^2 - 4(3a)c < 0$
 $4b^2 - 12.ac < 0$
 $b^2 - 3.ac < 0$... (2)

24. Jika kurva $y = (x^2 - a)(2x + b)^3$ turun pada interval $-1 < x < \frac{2}{5}$, maka nilai $ab = \dots$

- A. -3 D. 2
 B. -2 E. 3
 C. 1

Jawaban: D

$\Leftrightarrow y = (x^2 - a)(2x + b)^3$

\Leftrightarrow Syarat $f(x)$ turun \rightarrow $f'(x) < 0$
 $u \cdot v + u \cdot v' < 0$

$$(2x) \cdot (2x + b)^3 + (x^2 - a) \cdot \{3(2x + b)^2 \cdot 2\} < 0$$

$$2(2x + b)^2 \{x(2x + b) + 3(x^2 - a)\} < 0$$

$$\underbrace{2(2x + b)^2}_{\text{def}} \underbrace{(5x^2 + bx - 3a)}_{\text{harus -}} < 0$$

$$5x^2 + bx - 3a < 0$$

$f(x)$ turun pada interval $-1 < x < \frac{2}{5}$ artinya persamaan (1) dapat ditulis:

$$(5x - 2)(x + 1) < 0$$

$$5x^2 + 3x - 2 < 0 \rightarrow \text{sama dengan (1)}$$

sehingga: • $b = 3$

$$\bullet 3a = 2 \rightarrow a = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi } ab = \left(\frac{2}{3}\right)(3) = 2$$

NILAI STASIONER

25. Nilai stasioner dari $f(x) = 9 + 2x^2 - x^4$ dicapai pada $x \dots$

A. $-1, 0$ dan 1

D. $-8, 9$ dan 8

B. -4 dan 4

E. 8 dan 9

C. $-9, 8$ dan 9

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow f(x) = 9 + 2x^2 - x^4$$

\Leftrightarrow Keadaan stasioner $f(x)$ ketika:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 4x - 4x^3 = 0$$

$$4x \cdot (1 - x^2) = 0$$

$$4x \cdot (1 - x) \cdot (1 + x) = 0$$

\Leftrightarrow Nilai stasioner $f(x)$ dicapai ketika $x = 0, 1$ dan -1

26. Jika fungsi $f(x) = x^5 - 15x^3$ mencapai minimum di titik

A. $(0, 0)$

D. $(3, -162)$

B. $(1, -14)$

E. $(-3, 162)$

C. $(-1, 14)$

Jawaban: D

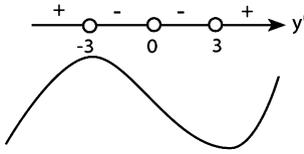
$$\Leftrightarrow f(x) = x^5 - 15x^3$$

\Leftrightarrow $f(x)$ maksimum ketika:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 5x^4 - 45x^2 = 0$$

$$5x^2 (x^2 - 9) = 0$$

$$5x^2 (x - 3)(x + 3) = 0$$



Dari gambar terlihat bahwa kurva minimum terjadi pada saat $x = 3$

- $f(3) = (3)^5 - 15(3)^3 = -162$ (nilai balik minimum)

$\Leftrightarrow f(x)$ mencapai minimum di titik $(3, -162)$

27. Grafik fungsi f dengan $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ pada interval $0 < x < 2$ akan memiliki

- A. titik balik minimum di $(1, 4)$
- B. titik belok di titik $(1, 4)$
- C. titik balik maksimum di $(1, 4)$
- D. titik balik minimum di $(1, 3)$
- E. titik balik maksimum $(1, 3)$

Jawaban: C

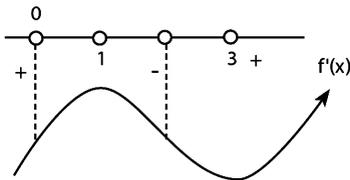
$\Leftrightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

\Leftrightarrow Keadaan stasioner $f(x)$ ketika:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x - 1)(x - 3) = 0$$



\Leftrightarrow Dari sketsa kurva $f(x)$ dalam interval $0 < x < 2$ terlihat bahwa $f(x)$ maksimum di $x = 1$

Nilai maksimum kurva $f(x) = f(1) = (1)^3 - 6(1)^2 + 9(1) = 4$

Titik balik maksimumnya $(1, 4)$

\Leftrightarrow Kurva $f(x)$ belok ketika:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 12 = 0 \rightarrow x = 2$$

Nilai belok kurva $f(x) = f(2)$
 $= (2)^3 - 6(2)^2 + 9(2) = 2$
 Titik beloknya $(2, 2) \rightarrow$ B. salah

28. Akar-akar persamaan $x^2 - (a + 3)x + 4a = 0$ adalah α dan β . Nilai minimum dari $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta$ dicapai untuk $a = \dots$
- A. -7
 B. -2
 C. 2
 D. 3
 E. 7

Jawaban: A

$\Leftrightarrow x^2 - (a + 3)x + 4a = 0$

- $\alpha + \beta = (a + 3)$
- $\alpha\beta = 4a$

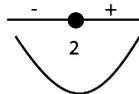
$f = \alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha\beta$
 $= (\alpha^2 + \beta^2) + 2\alpha\beta$
 $f_A = (a + 3)^2 + 2(4a) = a^2 + 14a + 9$

\Leftrightarrow Fungsi f_A minimum ketika:
 $f'_A = 0 \rightarrow 2a + 14 = 0 \rightarrow a = -7$

29. Grafik fungsi $f(x) = x^4 - 32x$
- A. mempunyai titik tertinggi $(0, 0)$
 B. mempunyai titik terendah $(2, -48)$
 C. mempunyai titik belok di $x = 2$
 D. naik untuk $x < 2$
 E. turun untuk $x > 2$

Jawaban: B

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$
 $0 = 4x^3 - 32$
 $8 = x^3$
 $x = 2$



30. Nilai maksimum fungsi $y = 1 + \sin 2x + \cos 2x$ adalah \dots
- A. 2
 B. $1 + \sqrt{2}$
 C. 3
 D. $1 + 2\sqrt{2}$
 E. 4

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow y = 1 + \sin 2x + \cos 2x$$

Syarat stasioner $y \rightarrow = 0$

$$2 \cos 2x - 2 \sin 2x = 0 \rightarrow \text{dibagi 2}$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = 45^\circ, 225^\circ$$

$$x = 22,5^\circ, 112,5^\circ$$

$$\Leftrightarrow f(22,5^\circ) = 1 + \sin 45^\circ + \cos 45^\circ$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= 1 + \sqrt{2} \rightarrow (\text{nilai balik maks})$$

$$f(112,5^\circ) = 1 + \sin 225^\circ + \cos 225^\circ$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{2} \sqrt{2}$$

$$= 1 - \sqrt{2} \rightarrow (\text{nilai balik min})$$

SOAL TERAPAN

31. Dua bilangan bulat m dan n memenuhi hubungan $2m + n = -40$.

Nilai minimum dari $p = m^2 + n^2$ adalah

A. 405

D. 260

B. 395

E. 200

C. 320

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow 2m + n = -40 \rightarrow n = -2m - 40 \quad \dots(1)$$

$$\Leftrightarrow p = m^2 + n^2$$

$$p = m^2 + (-2m - 40)^2$$

$$p = 5m^2 + 160m + 1600$$

$$\Leftrightarrow \text{Nilai minimum } p \text{ terjadi ketika } p'(m) = 0$$

$$10m + 160 = 0 \rightarrow m = -16$$

Substitusikan $m = -16$ ke pers (1), diperoleh:

$$n = -2(-16) - 40 = -8$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, nilai minimum } p \text{ adalah:}$$

$$p = (-16)^2 + (-8)^2$$

$$p = 256 + 64 = 320$$

34. Suatu proyek dapat dikerjakan selama p hari dengan biaya setiap harinya $(4p + \frac{1500}{p} - 40)$ juta rupiah. Jika biaya minimum proyek tersebut adalah R juta rupiah, maka $R = \dots$
- A. 750
B. 940
C. 1170
D. 1400
E. 1750

Jawaban: D

⇔ Biaya proyek p hari adalah:

$$\begin{aligned} R(x) &= p \cdot \left(4p + \frac{1500}{p} - 40 \right) \\ &= -4p^2 - 40p + 1500 \end{aligned}$$

⇔ Biaya proyek minimum ketika:

$$R'(x) = 0 \rightarrow 8p - 40 = 0 \rightarrow p = 5$$

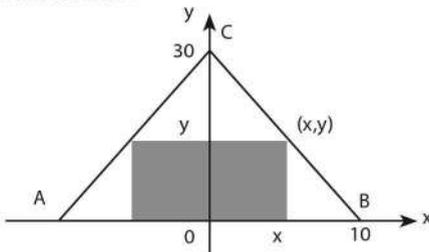
⇔ Biaya proyek minimum

$$\begin{aligned} R(5) &= 4(5) - 40(5) + 1500 \\ &= 100 - 200 + 1500 \\ &= 1400 \text{ juta rupiah} \end{aligned}$$

35. Diketahui sebuah segitiga sama kaki dengan alas 20 cm dan tinggi 30 cm. Dalam segitiga tersebut dibuat persegi panjang dengan alas yang terletak pada alas segitiga dan kedua titik sudut lainnya terletak pada kaki segitiga tersebut. Luas maksimum sikuempat yang dapat dibuat adalah

- A. 149 cm^2
B. 150 cm^2
C. $5\sqrt{13} \text{ cm}^2$
D. $5\sqrt{10} \text{ cm}^2$
E. $\frac{5}{2}\sqrt{13} \text{ cm}^2$

Jawaban: B



$$\Leftrightarrow \text{Garis BC: } 3x + y = 30 \rightarrow y = 30 - 3x$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas sikuempat} = 2x \cdot y$$

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x \cdot (30 - 3x) \\ &= 60x - 6x^2 \end{aligned}$$

$f(x)$ maksimum ketika:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 60 - 12x = 0 \rightarrow x = 5$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas maksimum } f(5) = 60(5) - 6(5)^2 = 150$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas siku empat akan maksimum apabila lebarnya } (l) = \frac{1}{2} AB = 10 \text{ dan panjangnya } (p) = \frac{1}{2} CO = 15 \rightarrow \text{luasnya} = p \cdot l = 150$$

36. Sebuah kotak obat tanpa tutup berbentuk persegi dan mempunyai volume 4000 cm^3 . Luas permukaan kotak obat minimum adalah

A. 1.800 cm^2

D. 1.100 cm^2

B. 1.240 cm^2

E. 1.000 cm^2

C. 1.200 cm^2

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow V = 4.000 = x^2 \cdot t$$

$$t = \frac{4.000}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{Luas permukaan } L(x) = x^2 + 4xt$$

$$= x^2 + 4x \left(\frac{4.000}{x^2} \right)$$

$$= x^2 + 16.000x^{-1}$$

$$\Leftrightarrow L(x) \text{ minimum ketika } L'(x) = 0 \rightarrow 2x - \frac{16.000}{x^2} = 0$$

$$x^3 - 8.000 = 0$$

$$x = 20$$

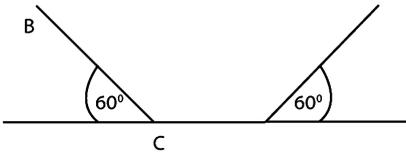
$$\Leftrightarrow \text{Luas permukaan kotak obat minimum:}$$

$$L(20) = (20)^2 + \frac{16.000}{20}$$

$$= 400 + 800$$

$$= 1.200$$

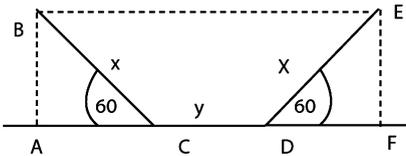
37.



Talang air dengan penampang yang berbentuk trapesium sama kaki (lihat gambar) dibuat dari seng yang lebarnya a cm. Supaya talang itu dapat menampung air sebanyak mungkin, maka $BC = \dots$

- A. $\frac{1}{2}a$ cm
 B. $\frac{1}{3}a$ cm
 C. $\frac{1}{3}a\sqrt{3}$ cm
 D. $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$ cm
 E. $\frac{1}{4}a\sqrt{2}$ cm

Jawaban: B



$$\Leftrightarrow \text{Lebar} = a = 2x + y \rightarrow y = a - 2x$$

$$\Leftrightarrow AB = FE = x \sin 60^\circ = \frac{1}{2}x \sqrt{3}$$

$$AC = DF = x \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x$$

\Leftrightarrow Volume maksimum terjadi jika luas trapesium BCDE maksimum.

\Leftrightarrow Luas BCDE adalah:

$$\begin{aligned} L &= \frac{(BE + CD) \cdot AB}{2} \\ &= \frac{\{(x + y) + y\} \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\{x + 2(a - 2x)\} \cdot \frac{1}{2}x\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{3}(2ax - 3x^2) \end{aligned}$$

\Leftrightarrow L maksimum ketika $L'(x) = 0$

$$\frac{1}{4}\sqrt{3}(2a - 6x) = 0 \rightarrow x = \frac{a}{3}$$

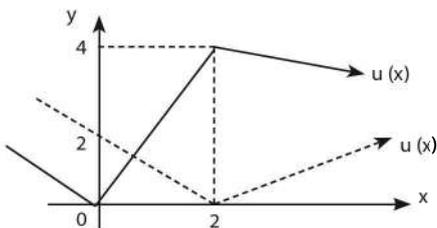
LATIHAN SOAL 20

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - I

1. Diketahui $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 5$, dan f' adalah turunan pertama dari f .
Nilai $f'(2) = \dots$
A. -8
B. -6
C. -5
D. -3
E. -2
2. Jika $f(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 1$, maka $f'(\frac{1}{2}) = \dots$
A. -20
B. -16
C. -12
D. -8
E. -4
3. Jika $f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 8$, maka $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4h} \{f(x+h) - f(x)\} = \dots$
A. $8x^3 - 8x$
B. $2x^3 - 2x$
C. $2x^3 - 4x$
D. $3x^2 - x$
E. $3x^2 + 2$

4. Jika $v = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$, maka $\frac{dv}{dx}$ untuk $x = -1$ adalah
- A. -8
B. -2
C. 0
D. 2
E. 8
5. Jika $f(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}}$, maka turunan fungsi f di 4 adalah $f'(4) = \dots$
- A. $\frac{1}{4}$
B. $\frac{1}{12}$
C. $\frac{1}{24}$
D. $-\frac{1}{2}$
E. $-\frac{1}{4}$
6. Jika $f(3 + 2x) = 4 - 2x + x^2$, maka $f'(1) = \dots$
- A. -4
B. -2
C. -1
D. 0
E. $\frac{1}{2}$
7. Diketahui fungsi f dan g dengan $g(x) = f(x^2 + 2)$. Jika diketahui bahwa $g'(1) = 2$, maka $f'(3)$ nilainya adalah
- A. 0
B. 1
C. 2
D. 3
E. 6
8. Jika $f(0) = 0$ dan $f'(0) = 2$, maka turunan dari $f(f(f(f(f(f(x))))))$ di $x = 0$ adalah
- A. 128
B. 64
C. 32
D. 16
E. 8
9. $u(x)$ dan $v(x)$ masing-masing merupakan fungsi dengan grafik seperti pada gambar di bawah ini.



Jika $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, maka $f'(1) = \dots$

- A. -2
B. -1
C. 2
D. 1
E. 0

TURUNAN FUNGSI TRIGONOMETRI

10. Jika $y = 3x^4 + \sin 2x + \cos 3x$, maka $y' = \dots$

- A. $12x^3 + 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$
B. $12x^3 + \cos 2x - \sin 3x$
C. $12x^3 - 2 \cos 2x + 3 \sin 3x$
D. $12x^3 - 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$
E. $12x^3 + 2 \cos 2x - 3 \sin 3x$

11. Turunan pertama dari $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$ adalah $y' = \dots$

- A. $\frac{\cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$
B. $\frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$
C. $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
D. $\frac{2}{(\sin x + \cos x)^2}$
E. $\frac{2 \sin x \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}$

12. Jika $r = \sqrt{\sin \theta}$, maka $\frac{dr}{d\theta} = \dots$

- A. $\frac{1}{2\sqrt{\sin \theta}}$
B. $\frac{\cos \theta}{2\sin \theta}$
C. $\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\sin \theta}}$
D. $\frac{-\sin \theta}{2\cos \theta}$
E. $\frac{2\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}}$

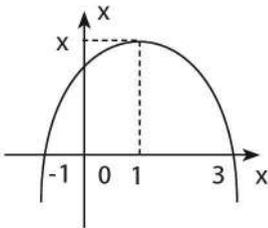
19. Garis singgung kurva $y = 5x^2 + 4x - 1$ yang melalui titik $(1, 8)$, memotong sumbu Y di titik
- A. $(0, -9)$ D. $(0, 7)$
 B. $(0, -8)$ E. $(0, 22)$
 C. $(0, -6)$
20. Jika garis singgung pada kurva $y = x^2 + ax + 9$ di titik yang berabsis 1 adalah $y = 10x + 8$, maka $a = \dots$
- A. 6 D. 9
 B. 7 E. 10
 C. 8
21. Garis singgung parabola $y = (x - 2)^2$ di titik (a, b) bergradien c . Nilai a adalah
- A. $2c + 4$ D. $\frac{1}{2}c + 2$
 B. $c + 4$ E. $c + 2$
 C. $\frac{1}{2}c + 4$
22. Salah satu garis singgung kurva $y = x^3 - 3x^2 + 1$, yang sejajar dengan $18x - 2y + 3 = 0$ adalah
- A. $y = -9x + 28$ D. $y = 9x - 10$
 B. $y = -9x - 26$ E. $y = 9x + 10$
 C. $y = 9x - 26$
23. Persamaan garis singgung pada kurva $y = ax^3 - 2x^2$ di titik $x = 1$ yang tegak lurus pada garis $x + 2y = 4$ adalah
- A. $y = -2x + 2$ D. $y = 2x + 2$
 B. $y = -2x + 1$ E. $y = 2x - 2$
 C. $y = 2x - 1$
24. Diketahui $f(x) = x^2(x - 3)$. Jika garis singgung kurva $y = f(x)$ di titik A dan di titik B pada kurva tersebut sejajar dengan sumbu $-x$, maka jarak A dan B adalah
- A. 2 D. $\sqrt{20}$
 B. 4 E. $\sqrt{29}$
 C. $\sqrt{13}$

31. Grafik fungsi $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx + 12$ naik, jika
- A. $b^2 - 4ac < 0$ dan $a > 0$ D. $b^2 - 3ac < 0$ dan $a > 0$
 B. $b^2 - 4ac < 0$ dan $a < 0$ E. $b^2 - 3ac < 0$ dan $a < 0$
 C. $b^2 - 3ac > 0$ dan $a < 0$
32. Untuk $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, fungsi $f(x) = \sin x - \sin^2 x + \sin^3 x + \dots$
- A. merupakan fungsi naik
 B. merupakan fungsi turun
 C. mempunyai maksimum saja
 D. mempunyai minimum saja
 E. mempunyai maksimum dan minimum

NILAI STASIONER

33. Fungsi $f(x) = x^3 + 9x^2 + 15x - 2$ mempunyai
- A. nilai minimum 23 untuk $x = -1$
 B. nilai maksimum -27 untuk $x = -1$
 C. nilai maksimum 9 untuk $x = -1$
 D. nilai minimum 9 untuk $x = -1$
 E. nilai maksimum 23 untuk $x = -5$
34. Jika x_1 dan x_2 akar-akar persamaan $x^2 + kx + k = 0$, maka nilai k yang menjadikan $x_1^3 + x_2^3$ mencapai maksimum adalah
- A. -2 D. 3
 B. -1 E. 4
 C. 2
35. Jika nilai maksimum fungsi $y = x + \sqrt{p - 2x}$ adalah 4, maka $p = \dots$
- A. 3 D. 7
 B. 4 E. 8
 C. 5

36. Jika kurva $y = kx^3 + 3x^2 + mx + 6$, k, m konstanta mencapai minimum di $x = -1$ dan mencapai maksimum di titik $(2, y_0)$, maka nilai y_0 adalah
- A. 24
B. 26
C. 28
D. 32
E. 36
37. Nilai maksimum fungsi $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ pada interval $-1 \leq x \leq 3$ adalah
- A. 16
B. 4
C. 3
D. 1
E. 0
38. Jika fungsi $f(x) = x^3 + px^2 - 9x$ hanya didefinisikan untuk nilai-nilai x yang memenuhi $-6 \leq x \leq 0$ dan mencapai nilai maksimum pada saat $x = -3$, maka nilai p adalah
- A. 6
B. -6
C. 2
D. -2
E. 3
39. Jika gambar di bawah ini adalah grafik $y = \frac{df(x)}{dx}$, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi $f(x)$

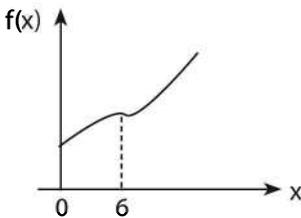


- A. mencapai nilai maksimum di $x = 1$
 B. mencapai nilai minimum di $x = -1$
 C. naik pada interval $\{x \mid x < 1\}$
 D. selalu memotong sumbu- y di titik $(0, 3)$
 E. merupakan fungsi kuadrat

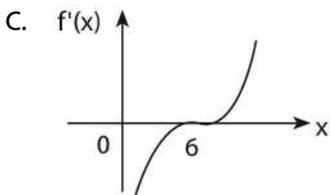
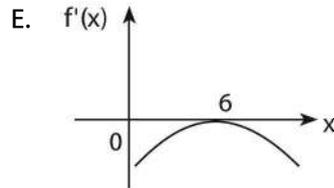
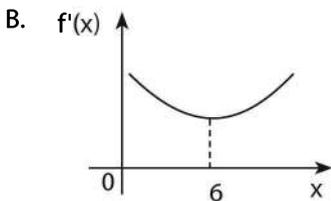
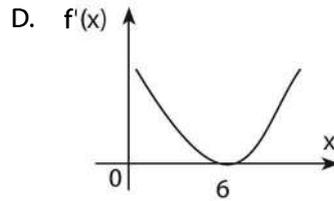
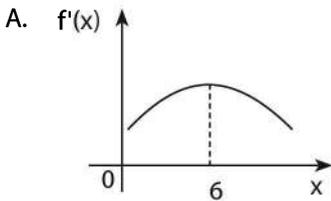
40. $f(x) = \frac{x}{x^2+1} + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^3 + \dots$

- A. merupakan fungsi naik
- B. merupakan fungsi turun
- C. mempunyai maksimum saja
- D. mempunyai minimum saja
- E. mempunyai maksimum dan minimum

41. Diketahui grafik suatu fungsi $y = f(x)$ yang mendatar sesaat untuk $x = 6$ sebagai berikut.



Grafik $f'(x)$ di sekitar $x = 6$ akan terlihat sebagai berikut



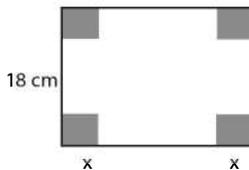
APLIKASI TERAPAN

42. Diketahui dua bilangan bulat p dan q memenuhi hubungan $q - 2p = 50$. Nilai minimum dari $p^2 + q^2$ adalah

- A. 100
- B. 250
- C. 500
- D. 1250
- E. 5000

43. Dari selembar karton berbentuk persegi yang berukuran sisi 18 cm akan dibuat kotak tanpa tutup, dengan cara menggunting empat buah persegi di setiap pojok karton, seperti gambar berikut. Volume kotak terbesar yang dapat dibuat adalah

- A. 256 cm^3
- B. 392 cm^3
- C. 432 cm^3
- D. 512 cm^3
- E. 588 cm^3



44. Panjang lintasan dalam meter sebuah titik pada saat titik itu telah bergerak selama t detik dinyatakan oleh $S(t) = 2t^3 - 18t^2 + 54t$. Kecepatan titik tersebut pada waktu percepatannya 12 m/det^2 adalah

- A. 4 meter/detik
- B. 6 meter/detik
- C. 8 meter/detik
- D. 10 meter/detik
- E. 12 meter/detik

45. Sebuah peluru ditembakkan vertikal ke atas dengan kecepatan awal $V_0 \text{ m/detik}$. Tinggi peluru setelah t detik dinyatakan dengan fungsi $h(t) = 100 + 40t - 4t^2$. Tinggi maksimum yang dapat dicapai peluru tersebut adalah

- A. 160 m
- B. 200 m
- C. 340 m
- D. 400 m
- E. 800 m

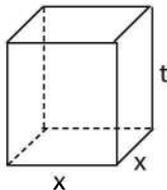
46. Di dalam suatu kerucut lingkaran tegak dengan tinggi t dan jari-jari alas r , dibuat tabung lingkaran tegak dengan alas dan sumbu berimpit dengan alas dan sumbu kerucut. Jika V_1 menyatakan volume kerucut dan V_2 adalah maksimum volume tabung yang dapat dibuat, maka $V_1 : V_2 = \dots$
- A. 3:1
B. 3:2
C. 9:4
- D. 9:8
E. 27:8

47. Sebuah balon berbentuk bola sedang dipompa sehingga volumenya bertambah 100 cm^3 per detik. Laju perubahan jari-jari balon ketika diameternya mencapai 50 cm adalah
- A. $\frac{1}{25\pi}$
B. $\frac{1}{5\pi}$
C. π
- D. 5π
E. 25π

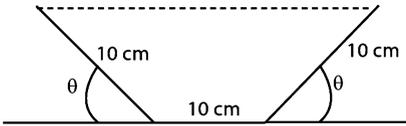
48. Suatu proyek akan diselesaikan dalam x hari. Jika proyek per hari adalah $B = \left(2x + \frac{1000}{x} - 40\right)$ dalam ribuan rupiah, maka biaya proyek minimum dalam x hari adalah
- A. Rp550.000
B. Rp800.000
C. Rp880.000
D. Rp900.000
E. Rp950.000

49. Sebuah bak air tanpa tutup dibuat dengan alas yang berbentuk bujur sangkar. Jumlah luas keempat dinding dan alasnya 27 m^2 . Volume terbesar diperoleh apabila luas alasnya

- A. 1 m^2
B. 4 m^2
C. 9 m^2
D. 16 m^2
E. 25 m^2



50. Sebuah talang air akan dibuat dari lembaran seng yang lebarnya 30 cm dengan melipat lebarnya atas tiga bagian yang sama, seperti terlihat pada gambar.



Jika θ menyatakan besar sudut dinding talang tersebut dengan bidang alasnya ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$), maka volume air yang tertampung paling banyak bila $\theta = \dots$

- A. 75°
- B. 60°
- C. 45°
- D. 30°
- E. $22,5^\circ$



INTEGRAL

21

A. PENDAHULUAN

a. Pengertian

- **Integral** merupakan operasi kebalikan dari turunan atau integral merupakan **anti turunan**.
- Jika $f(x)$ adalah fungsi turunan dari $F(x)$, yaitu $f(x) = F'(x)$, maka:

$$\int f(x) dx = \int F'(x) dx = F(x) + C$$

b. Jenis Integral

1. **Integral tak tentu:** $\int f(x) dx = F(x) + C$
2. **Integral tertentu:**

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a) \text{ dengan } a \leq x \leq b.$$

c. Sifat Umum Integral

- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$, dengan c konstanta
- $\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$

Jika $f(x)$ dan $g(x)$ kontinu pada interval $a \leq x \leq b$, maka:

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx$, dimana $a \leq p \leq b$

B. RUMUS INTEGRAL

a. Integral Fungsi Aljabar dan Eksponen

1. Rumus dasar :

- $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C$
- $\int p^x dx = \frac{p^x}{\ln p} + C$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$

2. Rumus pengembangan :

- $\int (ax+b)^n dx = \frac{1}{a(n+1)} (ax+b)^{n+1} + C$
- $\int e^{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \cdot e^{(ax+b)} + C$
- $\int p^{(ax+b)} dx = \frac{p^{(ax+b)}}{a \ln p} + C$
- $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C$

b. Integral Fungsi Trigonometri

1. Rumus dasar :

- $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$
- $\int \cos x \, dx = \sin x + C$
- $\int \tan x \, dx = \ln |\sec x| + C$
- $\int \operatorname{cosec} x \, dx = \ln |\operatorname{cosec} x - \cotan x| + C$
- $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$
- $\int \cotan x \, dx = \ln |\sin x| + C$
- $\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cotan x + C$

2. Rumus pengembangan :

- $\int \sin(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cos(ax + b) + C$
- $\int \cos(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$
- $\int \tan(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sec(ax + b)| + C$
- $\int \operatorname{csc}(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\operatorname{csc}(ax + b) - \cot(ax + b)| + C$
- $\int \sec(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sec(ax + b) + \tan(ax + b)| + C$
- $\int \cotan(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |\sin(ax + b)| + C$
- $\int \sec^2(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} \cdot \tan(ax + b) + C$
- $\int \operatorname{cosec}^2(ax + b) \, dx = -\frac{1}{a} \cotan(ax + b) + C$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Hasil dari $\int (3x^2 - 4x + 5) dx$ adalah

- A. $3x^3 - 4x^2 + 5x + C$ D. $x^3 - 4x^2 + 5x + C$
B. $3x^3 - 2x^2 + 5x + C$ E. $-x^3 + 2x^2 + 5x + C$
C. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int (3x^2 - 4x + 5) dx \\ &= \frac{3}{3}x^2 - \frac{4}{2}x^2 + 5x + C \\ &= x^3 - 2x^2 + 5x + C\end{aligned}$$

2. Jika $b > 0$ dan $\int_1^b (2x - 3) dx = 12$, maka nilai $b = \dots$

- A. 3 D. 6
B. 4 E. 7
C. 5

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int_1^b (2x - 3) dx &= 12 \\ (x^2 - 3x) \Big|_1^b &= 12 \\ (b^2 - 3b) - (1 - 3) &= 12 \\ b^2 - 3b - 10 &= 0 \\ (b - 5) \cdot (b + 2) &= 0\end{aligned}$$

\Leftrightarrow Nilai b yang memenuhi adalah 5

3. Nilai $\int_0^2 (2x - 1)^3 dx = \dots$

- A. 10 D. 80
B. 20 E. 160
C. 40

Jawaban: E

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int_0^2 (2x-1)^3 dx &= \left(\frac{1}{2(4)}(2x-1)^4 \right)_0^2 \\ &= \frac{1}{8} \{ (3)^4 - (-1)^4 \} \\ &= \frac{1}{8}(81-1) = 10\end{aligned}$$

4. Jika $\int_a^{3a} f(x) dx = K$, maka $\int_a^{2a} f(5a-2x) dx = \dots$

- A. $2K$ D. $-\frac{1}{2}K$
B. $-2K$ E. $5K$
C. $\frac{1}{2}K$

Jawaban: C

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int_a^{3a} f(x) dx &= K \\ \{F(x)\}_a^{3a} &= K \rightarrow F(3a) - F(a) = K\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int_a^{2a} f(5a-2x) dx &= -\frac{1}{2} \{F(5a-2x)\}_a^{2a} \\ &= -\frac{1}{2} \{F(5a-4a) - F(5a-a)\} \\ &= -\frac{1}{2} \underbrace{\{F(a) - F(3a)\}}_{-K} = \frac{1}{2}K\end{aligned}$$

5. Jika $f(x) = ax + b$, $\int_0^1 f(x) dx = 1$ dan $\int_1^2 f(x) dx = 5$, maka $a + b = \dots$

- A. 3 D. -3
B. 4 E. -4
C. 5

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = 6$$

$$\int_0^2 f(x) dx = 6 = \int_0^2 (ax + b) dx$$

$$6 = \left(\frac{a}{2}x^2 + bx\right)_0^2$$

$$6 = (2a + 2b) - (0)$$

\Leftrightarrow Nilai $a + b = 3$

6. Jika $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{jika } x \leq 1 \\ 3x^2 & \text{jika } x > 1 \end{cases}$, $\int_0^2 f(x) dx = \dots$

A. 15

D. 9

B. 12

E. 8

C. 10

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 (2x+1) dx + \int_1^2 (3x^2) dx$$

$$= (x^2 + x) \Big|_0^1 + x^3 \Big|_1^2$$

$$= (1 + 1) + (8 - 1) = 9$$

7. Nilai dari $\int \sin 5x \cos 3x dx = \dots$

A. $\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{4} \cos 2x + C$

D. $-\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{4} \cos 2x + C$

B. $\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x + C$

E. $-\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

C. $-\frac{1}{16} \cos 8x - \frac{1}{2} \cos 2x + C$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$$

$$2 \sin 5x \cos 3x = \sin(5x+3x) + \sin(5x-3x)$$

$$\sin 5x \cdot \cos 3x = \frac{1}{2} \{ \sin 8x + \sin 2x \}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \int \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 2x + \operatorname{tg}^4 2x - \operatorname{tg}^6 2x + \dots} dx \\ & = \int \sqrt{\cos^2 2x} dx \\ & = \int \cos 2x dx = \frac{1}{2} \sin 2x + k \end{aligned}$$

10. $\int 4 \sin^2 2x \cdot \cos x dx = \dots$

- A. $2 \sin x - \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x + C$
- B. $-2 \sin x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{3} \sin 3x + C$
- C. $-2 \sin x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$
- D. $2 \sin x - \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$
- E. $2 \sin x + \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$

Jawaban: D

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \int 4 \sin^2 2x \cdot \cos x dx \\ & = \int 2 \sin 2x \cdot (2 \sin 2x \cos x) dx \\ & = \int 2 \sin 2x \cdot \{\sin 3x + \sin x\} dx \\ & = \int \{(2 \sin 3x \sin 2x) + (2 \sin 2x \sin x)\} dx \\ & = \int \{-(\cos 5x - \cos x) - (\cos 3x - \cos x)\} dx \\ & = \int \{2 \cos x - \cos 5x - \cos 3x\} dx \\ & = 2 \sin x - \frac{1}{5} \sin 5x - \frac{1}{3} \sin 3x + C \end{aligned}$$

C. TEKNIK INTEGRAL

Teknik integral pada umumnya digunakan ketika pengintegralan tidak bisa langsung menggunakan rumus dasar.

a. Teknik Substitusi 1

Bentuk integral substitusi 1 adalah $\int \left\{ f(u) \frac{du}{dx} \right\} dx = \int u du$

b. Teknik Substitusi 2

Teknik integral ini digunakan ketika menemukan bentuk–bentuk:

$$\sqrt{a^2 - x^2}, \sqrt{x^2 + a^2}, \text{ dan } \sqrt{x^2 - a^2}$$

Penyelesaian integral ini dapat diselesaikan dengan menggunakan **substitusi trigonometri**.

- Bentuk $\sqrt{a^2 - x^2}$ substitusikan $x = a \sin \theta$
- Bentuk $\sqrt{x^2 + a^2}$ substitusikan $x = a \tan \theta$
- Bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$ substitusikan $x = a \sec \theta$

Hasil substitusi persamaan di atas adalah:

- $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos \theta$
- $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec \theta$
- $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan \theta$

c. Teknik Parsial

Jika $u = f(x)$ dan $v = g(x)$, maka bisa digunakan hubungan:

$$\int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

Alternatif Integral parsial bisa juga dengan pembelahan

$$\frac{f(x) \cdot g(x)}{y} \, dx$$

Ciri–ciri umum:

- Fungsi yang **diferensialkan** akan berakhir nol.
- Fungsi lainnya **diintegralkan**.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

TEKNIK SUBSTITUSI - 1

11. Hasil $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 5}} = \dots$

A. $\frac{1}{12}\sqrt{x^3 - 5} + C$

D. $\frac{1}{3}\sqrt{x^3 - 5} + C$

B. $\frac{1}{9}\sqrt{x^3 - 5} + C$

E. $\frac{2}{3}\sqrt{x^3 - 5} + C$

C. $\frac{1}{6}\sqrt{x^3 - 5} + C$

Jawaban: E

\Leftrightarrow misal: $u = x^3 - 5$
 $du = 3x^2 dx \rightarrow$ dibagi 3
 $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$\Leftrightarrow \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^3 - 5}} = \frac{1}{3} \cdot \int \frac{du}{\sqrt{u}}$
 $= \frac{1}{3} \cdot \int u^{-\frac{1}{2}} du$
 $= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} + c$
 $= \frac{2}{3} \sqrt{u} + c = \frac{2}{3} \sqrt{x^3 - 5} + c$

12. $15 \int_2^3 x \sqrt{x-2} dx = \dots$

A. 18

D. 24

B. 20

E. 26

C. 22

Jawaban: E

\Leftrightarrow misal: $u = \sqrt{x-2}$
 $u^2 = x - 2$
 $x = u^2 + 2 \rightarrow dx = 2u du$

untuk $x = 2 \rightarrow u = 0$

untuk $x = 3 \rightarrow u = 1$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & 15 \int_2^3 x \sqrt{x-2} \, dx \\ &= 15 \int_0^1 (u^2 + 2) \cdot u \cdot (2u \, du) \\ &= 15 \int_0^1 (2u^4 + 4u^2) \, du \\ &= 15 \cdot \left(\frac{2}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3 \right) \Big|_0^1 \\ &= 15 \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{3} \right) = 15 \left(\frac{26}{15} \right) = 26 \end{aligned}$$

13. Nilai $\int x \sin(x^2 + 1) \, dx = \dots$

A. $-2 \cos(x^2 + 1) + C$

D. $\cos(x^2 + 1) + C$

B. $-\cos(x^2 + 1) + C$

E. $\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C$

C. $-\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C$

Jawaban: C

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int x \sin(x^2 + 1) \, dx &\rightarrow \text{misal } u = x^2 - 1 \\ &du = 2x \, dx \\ &x \, dx = \frac{1}{2} \, du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int x \sin(x^2 + 1) \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin u \, du \\ &= -\frac{1}{2} \cos u + C \\ &= -\frac{1}{2} \cos(x^2 + 1) + C \end{aligned}$$

14. $\int \sin^2 x \cos x \, dx = \dots$

(1) $\frac{1}{3} \sin^3 x + C$

(2) $\frac{1}{3} \cos^3 x + C$

(3) $\frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin x \cos^2 x + C$

(4) $\frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \cos x \sin^2 x + C$

Pernyataan yang benar adalah

- A. (1), (2), dan (3)
B. (1) dan (3)
C. (2) dan (4)

- D. (4)
E. (1), (2), (3), dan (4)

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \text{misal } u = \sin x \rightarrow du = \cos x \, dx$$

$$\begin{aligned}\Leftrightarrow \int \sin^2 x \cos x \, dx \\ &= \int u^2 \, du \\ &= \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \frac{1}{3}\sin^3 x + C \rightarrow (1) \\ &= \frac{1}{3}\sin x (\sin^2 x) + C \\ &= \frac{1}{3}\sin x (1 - \cos^2 x) + C \\ &= \frac{1}{3}\sin x - \frac{1}{3}\sin x \cos^2 x + C \rightarrow (3)\end{aligned}$$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x \, dx$ adalah

- A. 0
B. 0,5
C. -0,5
D. 1,5
E. -1,5

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow \text{misal } u = \cos x \rightarrow du = -\sin x \, dx$$

- untuk $u = 0 \rightarrow \cos 0 = 1$
- untuk $u = \frac{\pi}{2} \rightarrow \cos \frac{\pi}{2} = 0$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos x) \sin x \, dx = \int_1^0 -(1 - u) \, du$$

$$= -u + \frac{1}{2}u^2 \Big|_1^0 = 0 - \left(-1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

TEKNIK PARSIAL

16. $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = \dots$

A. $\frac{\pi}{4}$

D. π

B. $\frac{\pi}{3}$

E. $\frac{3\pi}{2}$

C. $\frac{\pi}{2}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow \int_0^{\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv}$$

misal: • $u = x \rightarrow du = dx$

• $dv = \sin x \, dx$

$$v = \int \sin x \, dx = -\cos x =$$

$$\Leftrightarrow \int u \, dv = u \cdot v - \int v \, du$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} &= -x \cdot \cos x - \int (-\cos x) \, dx \\ &= (-x \cdot \cos x + \sin x)_0^{\pi} \\ &= \{-\pi \cdot (-1) + 0\} - \{0 + 0\} \\ &= \pi \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

y'	\int	
x	$\sin x$	
1	$-\cos x$	\rightarrow dikalisilang dg +
0	$-\sin x$	\rightarrow dikalisilang dg -

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_0^{\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin x \, dx}_{dv} &= (-x \cdot \cos x + \sin x)_0^{\pi} \\ &= \{-\pi \cdot (-1) + 0\} - \{0 + 0\} \\ &= \pi \end{aligned}$$

y'	\int	
$\frac{x}{2}$	$\sin 4x$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4} \cos 4x$	→ dikali silang dg +
0	$-\frac{1}{16} \sin 4x$	→ dikali silang dg -

$\Leftrightarrow \int \frac{x}{2} (\sin 4x) dx$
 $= -\frac{x}{8} \cos 4x + \frac{1}{32} \sin 4x + C$
 $= -\frac{1}{32} (4x \cos 4x - \sin 4x) + C$

TEKNIK SUBSTITUSI – 2

17. Ditentukan $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

- a) nyatakan x dalam fungsi trigonometri
- b) tentukanlah turunan pertama dari x
- c) hitunglah $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$

Pembahasan:

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx = \int_0^1 \sqrt{2^2-x^2} dx$$

misal: $x = 2 \sin \theta \rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$

untuk $x = 0 \rightarrow \sin \theta = 0 \rightarrow \theta = 0$

untuk $x = 1 \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\begin{aligned} \text{sehingga } \sqrt{2^2-x^2} &= \sqrt{2^2-(2\sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{4(1-\sin^2\theta)} \\ &= 2 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 \cos \theta)(2 \cos \theta d\theta) \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \cos^2 \theta d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta \right) d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (2 + 2 \cos 2\theta) d\theta \\
&= [2\theta + \sin 2\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} \\
&= \left[2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin 2\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] - [2(0) + \sin 2(0)] \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3} - 0 \\
&= \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{3}
\end{aligned}$$

D. APLIKASI INTEGRAL

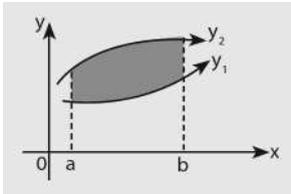
a. Menentukan Fungsi $f(x)$ Jika $f'(x)$ dan fA Diketahui.

Jika turunan pertama $f(x)$ adalah $f'(x)$, maka fungsi $f(x)$ dapat diperoleh melalui hubungan: $f(x) = \int f'(x) dx$

h. Menentukan Luas Daerah dan Volume Denda Putar

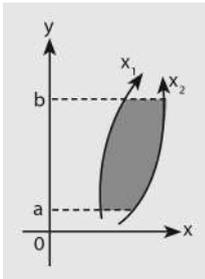
LUAS DAERAH

1. Luas daerah dalam interval $a \leq x \leq b$.



$$L = \int_a^b (y_{2(\text{atas})} - y_{1(\text{bawah})}) dx$$

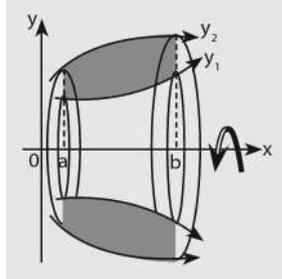
2. Luas daerah dalam interval $a \leq x \leq b$.



$$L = \int_a^b (x_{2(\text{kanan})} - x_{1(\text{kiri})}) dy$$

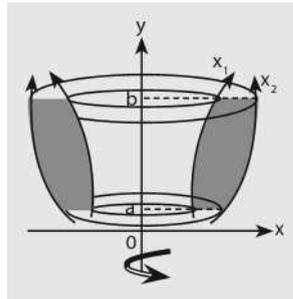
VOLUME BENDA PUTAR

1. Volume benda putar dari daerah yang diputar terhadap sumbu x dalam interval $a \leq x \leq b$.



$$V = \pi \int_a^b (y_{2(\text{atas})}^2 - y_{1(\text{bawah})}^2) dx$$

2. Volume benda putar dari daerah yang diputar terhadap sumbu y dalam interval $a \leq x \leq b$.



$$V = \pi \int_a^b (x_{2(\text{kanan})}^2 - x_{1(\text{kiri})}^2) dy$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

18. Gradien garis singgung sebuah kurva pada setiap titik (x, y) dinyatakan oleh $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x + 1$. Kurva melalui titik $(1, 4)$, maka persamaan kurva adalah

A. $y = 2x^3 - x^2 + x + 6$

D. $y = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$

B. $y = 2x^3 - x^2 + x + 4$

E. $y = 3x^3 - 2x^2 + x + 4$

C. $y = 2x^3 - x^2 + x + 2$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x + 1$$

$$y = \int (6x^2 - 2x + 1) dx$$

$$y = 2x^3 - x^2 + x + C$$

melalui titik $(1, 4)$

$$\bullet 4 = 2(1)^3 - (1)^2 + (1) + C \rightarrow C = 2$$

$$\Leftrightarrow \text{Persamaan kurva } y = 2x^3 - x^2 + x + 2$$

19. Jika $\frac{d}{dx} \left(f \left(\frac{x}{a} \right) \right) = x^2$ dengan $a \neq 0$, maka $f'(x) = \dots$

A. $a^3 x^2$

D. $a^3 x^3$

B. $a^2 x^2$

E. $\frac{x^3}{a^3}$

C. $\frac{x^2}{a^2}$

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx} \left(f \left(\frac{x}{a} \right) \right) = x^2$$

$$f \left(\frac{x}{a} \right) = \int x^2 dx$$

$$f \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{3} x^3 + C$$

$$f(x) = \frac{1}{3} (ax)^3 + C$$

$$\Leftrightarrow f'(x) = a (a \cdot x)^2 = a^3 x^2$$

20. Sebuah kurva melalui titik (0, 1) dan (1, 2). Jika gradien garis singgungnya di setiap titik (x, y) adalah $ax + 1$, maka kurva itu adalah sebuah

- A. lingkaran
 B. parabola
 C. hiperbol
 D. elips
 E. garis lurus

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow y' = ax + 1 \rightarrow y = \frac{a}{2}x^2 + x + C$$

$$\text{melalui (0,1)} \rightarrow 1 = C$$

$$\text{melalui (1,2)} \rightarrow 2 = \frac{a}{2} + 1 + 1$$

$$4 = a + 4 \rightarrow a = 0$$

\Leftrightarrow Kurva tersebut berupa garis lurus dengan persamaan $y = x + 1$

21. Kecepatan atau laju pertumbuhan penduduk suatu kota untuk t tahun yang akan datang dinyatakan sebagai $N(t) = 400t + 600\sqrt{t}$, $0 \leq t \leq 9$. Jika banyak penduduk saat ini adalah 5.000 jiwa, maka banyak penduduk 9 tahun yang akan datang adalah

- A. 37.000 jiwa
 B. 35.000 jiwa
 C. 33.500 jiwa
 D. 32.000 jiwa
 E. 30.000 jiwa

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow V(t) = N(t) = 400t + 600\sqrt{t}$$

$$S(t) = \int V(t) dt$$

$$= \int (400t + 600\sqrt{t}) dt$$

$$= 200t^2 + 400t^{\frac{3}{2}} + C$$

$$S(0) = 5000 \rightarrow C = 5000$$

\Leftrightarrow Banyaknya penduduk 9 tahun yang akan datang adalah:

$$S(t) = 200t^2 + 400t^{\frac{3}{2}} + 5000$$

$$S(9) = 200(9)^2 + 400(9)^{\frac{3}{2}} + 5000$$

$$= 32.000 \text{ jiwa}$$

22. Luas daerah yang dibatasi kurva $y = 2x^2 - 8$, dan sumbu x , pada $0 \leq x \leq 3$ adalah satuan luas.

A. $10 \frac{2}{3}$

D. $17 \frac{2}{3}$

B. $14 \frac{1}{3}$

E. $18 \frac{1}{3}$

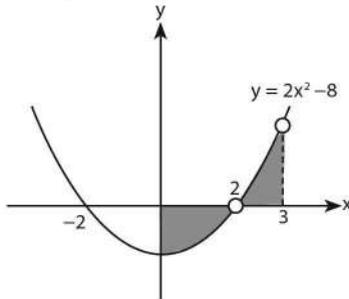
C. $15 \frac{1}{3}$

Jawaban: C

⇔ Syarat parabola $y = 2x^2 - 8$ memotong sumbu $x \rightarrow 2x^2 - 8 = 0$

$$x^2 = 8 \rightarrow x = \pm 2$$

Jadi, parabola tersebut memotong sumbu x di $(2, 0)$ dan $(-2, 0)$



Luas daerah yang diarsir adalah:

$$= - \int_0^2 (2x^2 - 8) dx + \int_2^3 (2x^2 - 8) dx$$

$$= - \left[\frac{2}{3}x^3 - 8x \right]_0^2 + \left[\frac{2}{3}x^3 - 8x \right]_2^3$$

$$= \left(\frac{32}{3} \right) + \left(\frac{14}{3} \right)$$

$$= 15 \frac{1}{3} \text{ satuan luas.}$$

23. Luas daerah dalam kuadran I yang dibatasi oleh $y = 4 - x^2$, $y = 3x$, dan $y = 0$, dapat dinyatakan sebagai

A. $\int_0^1 (4 - x^2 - 3x) dx$

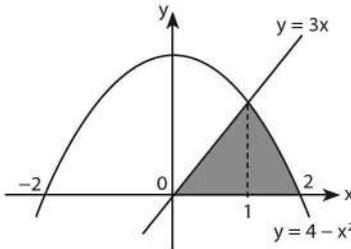
D. $\int_0^1 3x dx - \int_1^2 (4 - x^2) dx$

$$B. \int_0^2 (4 - x^2 - 3x) dx$$

$$E. \int_0^1 3x dx - \int_1^2 (x^2 - 4) dx$$

$$C. \int_0^2 (3x - 4 - x^2) dx$$

Jawaban: C



⇔ perpotongan $y = 4 - x^2$ dengan $y = 3x$ adalah:

$$3x = 4 - x^2$$

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(x + 4)(x - 1) = 0 \rightarrow x = -4 \text{ dan } x = 1$$

Absis titik potongnya $x = 1$ dan $x = -4$

⇔ Luas daerah yang diarsir adalah:

$$= \int_0^1 3x dx + \int_1^2 (4 - x^2) dx$$

$$= \int_0^1 3x dx - \int_1^2 (x^2 - 4) dx$$

24. Diketahui $f(x) = ax + b$, $f(x) < 0$ untuk $0 \leq x < 2$ dan $f(x) \geq 0$ untuk $x \geq 2$, $\int_0^4 f(x) dx = 0$ dan luas daerah yang dibatasi oleh $y = f(x)$, $x = 0$, $x = 4$, sumbu x adalah 8 maka $f(x)$ adalah

A. $2x - 4$

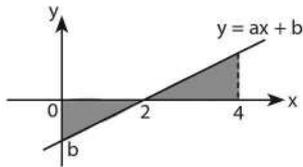
D. $4x + 2$

B. $4x - 2$

E. $4x$

C. $2x + 4$

Jawaban: A



$$\Leftrightarrow f(x) = ax + b$$

melalui $(2,0) \rightarrow 0 = 2a + b \quad \dots(1)$

\Leftrightarrow Luas daerah yang diarsir adalah

$$8 = - \int_0^2 (ax + b) dx + \int_2^4 (ax + b) dx$$

$$8 = - \left(\frac{a}{2}x^2 + bx \right)_0^2 + \left(\frac{a}{2}x^2 + bx \right)_2^4$$

$$8 = -(2a + 2b) + (8a + 4b) - (2a + 2b)$$

$$8 = 4a \rightarrow a = 2$$

- $a = 2$ substitusi ke (1) diperoleh $b = -4$
- sehingga $f(x) = 2x - 4$

SOLUSI SMART!

\Leftrightarrow Luas yang diarsir = 2 . luas Δ

$$8 = 2 \left(\frac{1}{2} \cdot (2) \cdot (b) \right)$$

$$b = -4 \text{ (di bawah sumbu } -x)$$

Untuk $b = -4$ disubstitusikan ke pers (1) diperoleh:

$$0 = 2a - 4 \rightarrow a = 2$$

\Leftrightarrow Persamaan kurvanya $y = 2x - 4$

25. Luas bagian bidang yang dibatasi oleh sumbu y , kurva $y = \cos 3x$ dan $y = \sin 3x$ adalah

A. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$

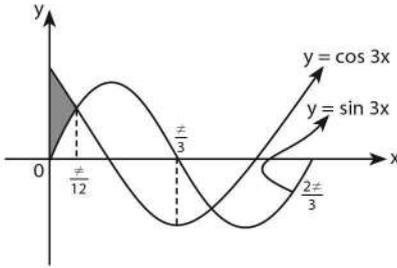
D. $\frac{1}{3}(\sqrt{2} + 1)$

B. $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$

E. $\frac{1}{6}(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

C. $\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)$

Jawaban: C



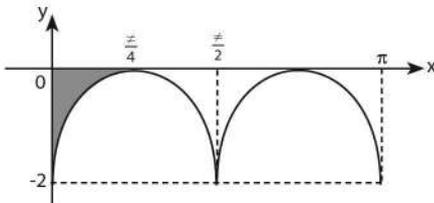
Luas daerah yang diarsir adalah:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/12} (\cos 3x - \sin 3x) dx \\ &= \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{3} \cos 3x \Big|_0^{\pi/12} \\ &= \frac{1}{3} \left(\left\{ \frac{1}{2} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2} \right\} - \{0 + 1\} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\sqrt{2} - 1) \end{aligned}$$

26. Luas daerah di kuadran IV yang dibatasi oleh grafik $y = 2 \sin^2 2x - 2$, sumbu- x dan juga sumbu- y adalah

- | | |
|-----------------------|------------------|
| A. $\frac{1}{4} \neq$ | D. $\frac{1}{2}$ |
| B. $\frac{1}{2} \neq$ | E. 1 |
| C. \neq | |

Jawaban: C



⇔ Luas daerah yang diarsir adalah:

$$\begin{aligned} &= - \int_0^{\pi/4} (2 \sin^2 2x - 2) dx \\ &= - \int_0^{\pi/4} \{ 2(\sin^2 2x - 1) \} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{-2 \cos^2 2x\} dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{1 - \cos 4x\} dx \\
&= \left(x + \frac{1}{4} \sin 4x\right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi\right) - 0 = \frac{1}{4} \pi
\end{aligned}$$

27. Volume benda putar yang terjadi, jika daerah antara kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x + 3$, diputar mengelilingi sumbu x adalah

- A. $\frac{67}{5} \neq$ satuan volume D. $\frac{133}{5} \neq$ satuan volume
 B. $\frac{107}{5} \neq$ satuan volume E. $\frac{183}{5} \neq$ satuan volume
 C. $\frac{117}{5} \neq$ satuan volume

Jawaban: C

⇔ Kurva $y = x^2 + 1$ dan $y = x + 3$ berpotongan ketika:

$$\begin{aligned}
x^2 + 1 &= x + 3 \\
x^2 - x - 2 &= 0 \\
(x - 2)(x + 1) &= 0 \\
x &= -1 \text{ dan } x = 2
\end{aligned}$$

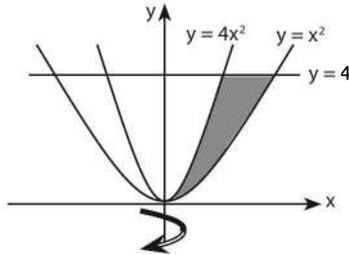
⇔ Volume benda putar yang terjadi adalah:

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_{-1}^2 (y_1^2 - y_2^2) dx \\
&= \pi \int_{-1}^2 \{(x+3)^2 - (x^2+1)^2\} dx \\
&= \pi \int_{-1}^2 \{(x^2+6x+9) - (x^4+2x^2+1)\} dx \\
&= \pi \int_{-1}^2 (-x^4 - x^2 + 6x + 8) dx \\
&= \pi \left(-\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x\right) \Big|_{-1}^2 \\
&= \frac{117}{5} \pi \text{ satuan volume}
\end{aligned}$$

28. Daerah D terletak di kuadran pertama yang dibatasi oleh parabola $y = x^2$, parabola $y = 4x^2$, dan garis $y = 4$. Volume benda putar yang terjadi bila D diputar terhadap sumbu y adalah

- A. 3π
- B. 4π
- C. 6π
- D. 8π
- E. 20π

Jawaban: C

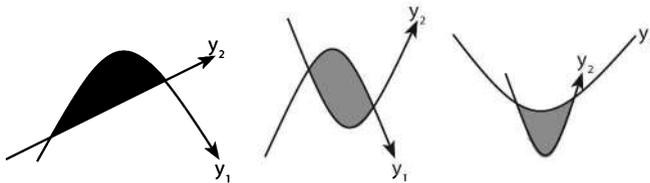


⇔ Volume daerah yang diarsir setelah diputar terhadap sumbu y adalah

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^4 (x_1^2 - x_2^2) dy \\
 &= \pi \int_0^4 \left(y - \frac{y}{4} \right) dy \\
 &= \pi \int_0^4 \frac{3}{4} y dy = \pi \left[\frac{3}{8} y^2 \right]_0^4 = 6\pi
 \end{aligned}$$

E. LUAS DAERAH KHUSUS

- Luas antara garis lurus dan parabola atau antara dua buah parabola.



SOLUSI SMART!

$$\Leftrightarrow \text{Luas yang diarsir} = \frac{2}{3} \cdot (2) \cdot (24) = 32$$

30. Jika D adalah daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 4x - x^2$ serta garis yang melalui $(4, 0)$ dan puncak parabola, maka luas D adalah

....

A. $\frac{4}{3}$

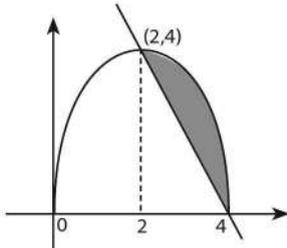
D. $\frac{26}{3}$

B. $\frac{16}{3}$

E. $\frac{28}{3}$

C. $\frac{20}{3}$

Jawaban: A



$$\Leftrightarrow y = 4x - x^2 - x_e = \frac{-b}{2a} = 2$$

$$y_e = f(2) = 8 - 4 = 4$$

\Leftrightarrow Garis yang melalui titik $(4, 0)$ dan $(2, 4)$ adalah $y = -2x + 8$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Luasnya} &= \int_2^4 \{(4x - x^2) - (-2x + 8)\} dx \\ &= \int_2^4 \{-x^2 + 6x - 8\} dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 8x \right)_2^4 \\ &= \left(\frac{-64}{3} + 48 - 32 \right) - \left(\frac{-8}{3} + 12 - 16 \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!

⇨ Persamaan garis yang melalui titik (2, 4) dan (4, 0) → $y_1 = -2x + 8$

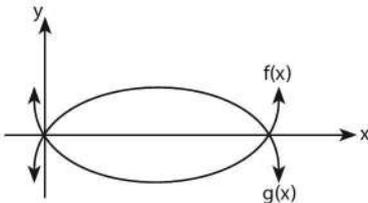
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y_1 - y_2 &= (4x - x^2) - (-2x + 8) \\ &= -x^2 + 6x - 8 \end{aligned}$$

$$a = -1, b = 6, c = -8$$

- $D = 36 - 4(8) = 4$

$$\Leftrightarrow \text{Luasnya} = \frac{D\sqrt{D}}{6 \cdot a^2} = \frac{4 \cdot (2)}{6 \cdot 1} = \frac{4}{3}$$

31.



Jika $f(x) = (x - 2)^2 - 4$ dan $g(x) = -f(x)$, maka luas daerah yang dibatasi oleh kurva f dan g adalah

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| A. $10\frac{2}{3}$ satuan luas | D. $42\frac{2}{3}$ satuan luas |
| B. $21\frac{1}{3}$ satuan luas | E. $45\frac{1}{3}$ satuan luas |
| C. $22\frac{2}{3}$ satuan luas | |

Jawaban: B**SOLUSI SMART!**

$$\Leftrightarrow f(x) = (x - 2)^2 - 4 = x^2 - 4x$$

$$g(x) = -f(x) = -x^2 + 4x$$

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= (x^2 - 4x) - (-x^2 + 4x) \\ &= 2x^2 - 8x \end{aligned}$$

- $a = 2, b = -8$ dan $c = 0$

- $D = b^2 - 4ac = 64$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Luas daerahnya} &= \frac{D \cdot \sqrt{D}}{6 \cdot a^2} \\ &= \frac{64 \cdot (8)}{6 \cdot (2)^2} \\ &= 21\frac{1}{3} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

32. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 - 9x + 15$ dan $y = -x^2 + 7x - 15$ adalah

- A. $2\frac{2}{3}$ satuan luas
 B. $2\frac{3}{5}$ satuan luas
 C. $3\frac{1}{3}$ satuan luas
 D. $4\frac{2}{3}$ satuan luas
 E. $4\frac{1}{3}$ satuan luas

Jawaban: A

SOLUSI SMART!

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y^1 - y^2 &= (x^2 - 9x + 15) - (-x^2 + 7x - 15) \\ &= 2x^2 - 16x + 30 \end{aligned}$$

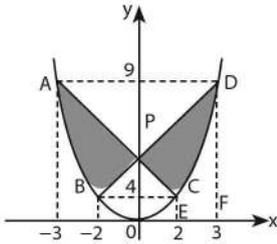
- $a = 2$, $b = -16$ dan $c = 30$
- $D = b^2 - 4ac = 16$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Luas daerahnya} &= \frac{D \cdot \sqrt{D}}{6 \cdot a^2} \\ &= \frac{16 \cdot (4)}{6 \cdot (2)^2} = 2\frac{2}{3} \text{ satuan luas} \end{aligned}$$

33. Titik-titik $A = (-3, 9)$, $B = (-2, 4)$, $C = (2, 4)$ dan $D = (3, 9)$ terletak pada parabola $y = x^2$, garis AC adalah BD berpotongan di titik P. Jumlah luas daerah PAB dan daerah PCD adalah

- A. 12
 B. $\frac{37}{3}$
 C. 15
 D. 18
 E. $\frac{32}{3}$

Jawaban: B



⇔ Luas daerah yang diarsir

$$= 2 (L.OPDF - L.OPCE - L.ECDF)$$

$$= 2 \left[\left(\frac{(OP + FD) \cdot OF}{2} \right) - \left(\frac{(OP + EC) \cdot OE}{2} \right) - \int_2^3 x^2 dx \right]$$

$$= 2 \left[\left(\frac{(6 + 9) \cdot 3}{2} \right) - \left(\frac{(6 + 4) \cdot 2}{2} \right) - \left(\frac{1}{3} x^3 \right)_2^3 \right]$$

$$= 2 \left[\frac{45}{2} - \frac{20}{2} - \frac{19}{3} \right] = \frac{37}{3}$$

34. Jika D daerah di kuadran I yang dibatasi oleh parabola $y^2 = 2x$ dan garis $x - y = 4$, maka luas D =

A. $40\sqrt{2}$

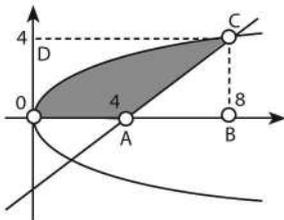
D. $\frac{64}{3}$

B. 40

E. $13\frac{1}{3}$

C. $\frac{64}{3}\sqrt{2}$

Jawaban: E



⇔ Luas daerah yang diarsir

$$= \frac{2}{3} \text{ luas } OBCD - \text{Luas } \triangle ABC$$

$$= \frac{2}{3} (8)(4) - \frac{1}{2} (4) \cdot (4)$$

$$= 13\frac{1}{3}$$

LATIHAN SOAL 21

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Hasil dari $\int (x^3 - x^2 - x + 5) dx = \dots$
 - A. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 5x + C$
 - B. $4x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 5x + C$
 - C. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{5}x + C'$
 - D. $\frac{1}{4}x^4 - 3x^3 - 3x^2 + \frac{5}{2}x + C$
 - E. $3x^2 - 2x - 1 + C$
2. Hasil dari $\int_0^2 3(x+1)(x-6) dx = \dots$
 - A. -58
 - B. -56
 - C. -28
 - D. -16
 - E. -14
3. Nilai $\int_p^3 (3x^2 - 2x + 2) dx = 40$ maka nilai $\frac{1}{2}p = \dots$
 - A. 2
 - B. 1
 - C. -1
 - D. -2
 - E. -4

4. Jika p banyaknya faktor prima dari 42 dan q akar positif persamaan

$$3x^2 - 5x - 2 = 0, \int_q^p (5 - 3x) dx = \dots$$

- A. $-3\frac{2}{3}$
- B. $-2\frac{1}{2}$
- C. $2\frac{1}{2}$
- D. $3\frac{1}{3}$
- E. $5\frac{1}{2}$

5. Jika $\int_0^1 f(x) dx = 2$ dan $\int_2^1 2f(x) dx = 2$, maka $\int_0^2 f(x) dx = \dots$

- A. 3
- B. 1
- C. 0
- D. -1
- E. -2

6. $\int_{-3}^3 |x^2 - 2x - 3| dx = \dots$

- A. 0
- B. 18
- C. $\frac{68}{3}$
- D. $\frac{64}{3}$
- E. 9

7. Diketahui $\int_a^b \frac{1}{x-1} dx = c$. Nilai dari $\int_a^b \frac{(x+1)}{2(x-1)} dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}(b-a) + c$
- B. $\frac{1}{2}(b-a+c)$
- C. $\frac{1}{2}(b-a-c)$
- D. $(a-b+c)$
- E. $(b-a+c)$

8. Jika $\int_1^4 f(x) dx = 6$, maka $\int_1^4 f(5-x) dx = \dots$

- A. 6
- B. 3
- C. 0
- D. -1
- E. -6

9. Jika $f(x) = 2x - \frac{2}{3}x^2$, maka $\int_0^1 f(x) dx = \dots$

A. $-\frac{2}{3}$

D. $\frac{4}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{4}$

10. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx = \dots$

A. $1/2$

D. 1

B. 0

E. $\sqrt{3}$

C. 2

11. $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \dots$

A. 0

D. $\frac{\pi}{3}$

B. 1

E. π

C. $\frac{\pi}{2}$

12. $\int 8\sin^2 x \cdot \cos^2 x dx = \dots$

A. $x - \sin 4x + C$

D. $x + \frac{1}{4}\sin 4x + C$

B. $x + \sin 4x + C$

E. $x - 4\sin 4x + C$

C. $x - \frac{1}{4}\sin 4x + C$

SOL LATIHAN - 1

13. $\int x^2 \sqrt{2x^3 - 1} dx = \dots$

A. $\frac{1}{9}(2x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

D. $\frac{2}{9}(2x^3 - 1)^{\frac{1}{2}} + C$

B. $\frac{1}{9}(2x^3 - 1)^{\frac{1}{2}} + C$

E. $\frac{1}{9}(2x^3 - 1)^{\frac{5}{2}} + C$

C. $\frac{2}{9}(2x^3 - 1)^{\frac{3}{2}} + C$

14. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-2}} dx = \dots$

A. $\sqrt{x^2+2x-2} + C$

D. $\frac{1}{2}\sqrt{(x^2+2x-2)^3} + C$

B. $\frac{1}{2}\sqrt{x^2+2x-2} + C$

E. $\sqrt{(x^2+2x-2)^3} + C$

C. $2\sqrt{x^2+2x-2} + C$

15. Hasil substitusi $u = x + 1$ pada $\int_0^1 x^2 \sqrt{x+1} dx$ adalah \dots

A. $\int_0^1 (u-1)^2 \sqrt{u} du$

D. $\int_0^1 (u-1)^2 u du$

B. $\int_0^1 x^2 \sqrt{u} du$

E. $\int_1^2 (u-1)^2 \sqrt{u} du$

C. $\int_1^2 (u-1) \sqrt{u} du$

16. Jika nilai $\int_1^2 f(x) dx = 6$ maka nilai $\int_0^1 xf(x^2+1) dx$ adalah \dots

A. 1

D. 5

B. 3

E. 6

C. 4

17. $\int (2x+1) \sin x dx = \dots$

A. $(2x+1) \cos x - 2 \sin x + C$

B. $(2x+1) \cos x - \frac{1}{2} \sin x + C$

C. $-(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$

D. $-(2x+1) \cos x + \frac{1}{2} \sin x + C$

E. $(2x+1) \cos x + 2 \sin x + C$

18. $\int x \sin(2x) dx = \dots$
- A. $\frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2} x \cos(2x) + C$
 B. $\frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{2} x \cos(2x) + C$
 C. $\frac{1}{4} \sin(2x) - \frac{1}{2} \cos(2x) + C$
 D. $-\frac{1}{4} \cos(2x) - \frac{1}{2} x \sin(2x) + C$
 E. $\frac{1}{4} \cos(2x) + \frac{1}{2} x \sin(2x) + C$
19. $\int \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x} dx = \dots$
- A. $\frac{2}{3}(1 - \cos x)^{\frac{2}{3}} + C$
 B. $\frac{1}{3}(1 - \cos x)^{\frac{1}{2}} + C$
 C. $\frac{2}{3}(1 - \cos x)^{\frac{1}{2}} + C$
 D. $\frac{2}{3}(1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} + C$
 E. $\frac{1}{3}(1 - \cos x)^{\frac{3}{2}} + C$
20. $\int \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} dx = \dots$
- A. $-\sqrt{9 - x^2} + C$
 B. $\sqrt{9 - x^2} + C$
 C. $x - \sqrt{9 - x^2} + C$
 D. $x + \sqrt{9 - x^2} + C$
 E. $1 + \sqrt{9 - x^2} + C$
21. $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} dx = \dots$
- A. 1
 B. 3
 C. 5
 D. 6
 E. 7

SOAL LATIHAN - 3

22. Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) sama dengan $2x - 5$. Jika kurva ini melalui titik $(4, 7)$, maka kurva tersebut memotong sumbu- y di
- A. $(0, 11)$
 B. $(0, 10)$
 C. $(0, 9)$
 D. $(0, 8)$
 E. $(0, 7)$

23. Gradien garis singgung kurva $y = f(x)$ di sembarang titik (x, y) dinyatakan oleh rumus $\frac{dy}{dx} = -3x^2 + 6x$. Kurva melalui $(-1, 10)$, maka persamaan kurva adalah
- A. $y = 2x^3 + 3x^2 + 9$ D. $y = -x^3 + 3x^2 + 6$
B. $y = x^3 + 3x^2 - 6$ E. $y = -x^3 - 3x^2 - 6$
C. $y = -2x^3 + 3x^2 + 5$
24. Fungsi $y = f(x)$ yang memiliki turunan $f'(x) = x^3$ dan garis singgung $x + y = 0$ adalah
- A. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{3}{4}$ D. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}$
B. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}$ E. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{4}$
C. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + -\frac{1}{4}$
25. Turunan kedua dari $f(x)$ adalah $f''(x) = 6x - 2$. Jika grafik $y = f(x)$ melalui titik $A(1, 6)$ dan garis singgung $y = f(x)$ di titik A mempunyai gradiennya 4, maka $f(x) = \dots$
- A. $x^3 - x^2 + 5x + 1$ D. $x^3 - x^2 + 2x + 4$
B. $x^3 - x^2 + 4x + 2$ E. $x^3 - x^2 + x + 5$
C. $x^3 - x^2 + 3x + 3$
26. Diketahui $\frac{df(x)}{dx} = 3\sqrt{x}$. Jika $f(4) = 19$, maka $f(1) = \dots$
- A. 2 D. 5
B. 3 E. 6
C. 4
27. Gradien garis singgung suatu kurva di titik (x, y) adalah $3\sqrt{x}$. Jika kurva ini melalui titik $(4, 9)$, maka persamaan garis singgung kurva ini di titik berabsis 1 adalah
- A. $3x - y - 1 = 0$ D. $3x - y + 8 = 0$
B. $3x - y + 4 = 0$ E. $3x - y - 8 = 0$
C. $3x - y + 8 = 0$

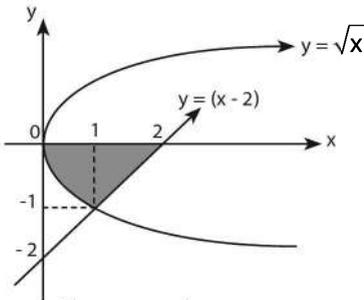
28. Diketahui $\frac{dF}{dx} = ax + b$, $F(0) - F(-1) = 3$, $F(1) - F(0) = 5$. $a + b = \dots$
- A. 8
B. 6
C. 2
- D. -2
E. -4
29. Grafik fungsi f melalui titik $(1, 0)$ dan $(2, 1)$, jika gradien garis singgungnya di setiap titik (x, y) dapat dituliskan dalam bentuk $ax + 1$ dengan a konstan, maka grafik fungsi f memotong sumbu y di titik
- A. $(0, 1)$
B. $(0, \frac{1}{2})$
C. $(0, \frac{1}{3})$
- D. $(0, -\frac{1}{3})$
E. $(0, -1)$
30. Luas daerah yang dibatasi kurva $y = 4 - x^2$, $y = -x + 2$ dan $0 \leq x \leq 2$ adalah
- A. $\frac{8}{3}$ satuan luas
B. $\frac{10}{3}$ satuan luas
C. $\frac{14}{3}$ satuan luas
- D. $\frac{16}{3}$ satuan luas
E. $\frac{26}{3}$ satuan luas
31. Luas daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 4x - x^2$, $y = -2x + 8$, dan sumbu Y adalah
- A. $4\frac{2}{3}$ satuan luas
B. $6\frac{2}{3}$ satuan luas
C. $12\frac{2}{3}$ satuan luas
- D. $20\frac{2}{3}$ satuan luas
E. $30\frac{2}{3}$ satuan luas
32. Jika luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x$ dan garis $y = (2m - 1)x$ adalah $4\frac{1}{2}$, maka $m = \dots$
- A. $1\frac{1}{2}$ atau $-\frac{1}{2}$
B. 2 atau -1
C. $2\frac{1}{2}$ atau $-1\frac{1}{2}$
- D. 3 atau -2
E. $3\frac{1}{2}$ atau $-2\frac{1}{2}$

33. Luas daerah yang dibatasi oleh $y = 2 \sin x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ dan sumbu x sama dengan
- A. 1 satuan luas
B. 2 satuan luas
C. 3 satuan luas
D. 4 satuan luas
E. 5 satuan luas

34. Integral yang menyatakan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{x}$, $x + y - 6 = 0$, dan sumbu x adalah

- A. $\int_0^6 \sqrt{x} dx + \int_6^9 (x-6) dx$
B. $\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_4^9 (x-6) dx$
C. $\int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^9 (x-6) dx$
D. $\int_0^4 \sqrt{x} dx - \int_4^6 (x-6) dx$
E. $\int_0^4 \sqrt{x} dx + \int_4^6 (x-6) dx$

35. Luas daerah di kuadran IV yang dibatasi oleh kurva $y^2 = x$, sumbu x , dan garis $x < y < 2 = 0$ dapat dinyatakan sebagai



- A. $\int_0^2 \sqrt{x} dx - \int_0^2 (2-x) dx$
B. $\int_0^2 \sqrt{x} dx + \int_0^2 (2-x) dx$
C. $\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_1^2 (2-x) dx$
D. $\int_0^1 \sqrt{x} dx + \int_1^2 (2-x) dx$
E. $\int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_1^2 (2+x) dx$

36. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin x$, $y = \cos x$ dan sumbu x untuk $0 < x < \frac{\pi}{2}$, adalah

A. $\int_0^{\pi/2} (\sin x - \cos x) dx$

D. $\int_0^{\pi/4} \cos x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin x dx$

B. $\int_0^{\pi/2} (\cos x - \sin x) dx$

E. $\int_0^{\pi/4} \sin x dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

C. $\int_0^{\pi/4} \sin x dx - \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos x dx$

37. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4 - x^2$ dan kurva $y = -x + 2$ untuk $-2 \leq x \leq 2$ adalah

A. $\frac{18}{3}$

D. $\frac{21}{3}$

B. $\frac{19}{3}$

E. $\frac{22}{3}$

C. $\frac{20}{3}$

38. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva fungsi $y = -\cos x$ dan turunannya pada selang $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ adalah

A. $\sqrt{3}$

D. 5

B. $2\sqrt{2}$

E. 6

C. 4

39. Volume benda putar dari daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan $y = 2x$ jika diputar mengelilingi sumbu X sejauh 360° adalah

A. $\frac{64}{3} \neq$ satuan volume

D. $\frac{64}{15} \neq$ satuan volume

B. $\frac{64}{5} \neq$ satuan volume

E. $\frac{32}{15} \neq$ satuan volume

C. $\frac{128}{15} \neq$ satuan volume

40. Daerah dibatasi kurva $y^2 = 10x$, $y^2 = 4x$ dan $x = 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu x . Volum benda putar yang terjadi adalah

A. 80π satuan

D. 24π satuan

B. 48π satuan

E. 18π satuan

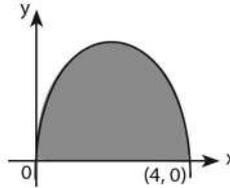
C. 32π satuan

41. Daerah D dibatasi oleh kurva $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$ dan sumbu X. Jika daerah D diputar terhadap sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi adalah
- A. π D. 2π
 B. π^2 E. $2\pi^2$
 C. $\frac{1}{2}\pi^2$
42. Garis g menyinggung kurva $y = \sin x$ di titik $(\pi, 0)$. Jika daerah yang dibatasi oleh garis g, garis $x = \frac{1}{2}\pi$ dan kurva $y = \sin x$ diputar mengelilingi sumbu X, maka volume benda putar yang terjadi adalah
- A. $\frac{\pi^2}{16}(\pi^2 - 8)$ D. $\frac{\pi^2}{8}(\pi^2 - 6)$
 B. $\frac{\pi^2}{16}(\pi^2 - 6)$ E. $\frac{\pi^2}{6}(\pi^2 - 8)$
 C. $\frac{\pi^2}{24}(\pi^2 - 6)$

SOAL LATIHAN - 4

43. Luas daerah yang dibatasi oleh parabola dan sumbu x, seperti pada gambar, adalah 32. Ordinat puncak parabola adalah

- A. 4
 B. 8
 C. 12
 D. 16
 E. 18



44. Luas daerah yang dibatasi kurva $y = x^2$, $y = (x - 4)^2$ dan sumbu x adalah

- A. 4 satuan luas D. 5 satuan luas
 B. $\frac{13}{3}$ satuan luas E. $\frac{16}{3}$ satuan luas
 C. $\frac{14}{3}$ satuan luas

45. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 + 2x - 3$ dan kurva $y = -x^2 - 2x + 3$ adalah

A. $\frac{25}{3}$

D. $21\frac{1}{3}$

B. $8\frac{2}{3}$

E. $31\frac{1}{3}$

C. 20

46. Jika $f(x) = x^2$, maka luas daerah yang dibatasi kurva $y = 9 - f(x)$, $y = 9 - f(x - 6)$, dan garis $y = 9$ adalah

A. 12

D. 30

B. 18

E. 36

C. 24

47. Luas daerah antara kurva $y = x^2 - 5x$ dan $y = -x^2 + 3x - 6$ adalah

A. $1\frac{1}{3}$ satuan luas

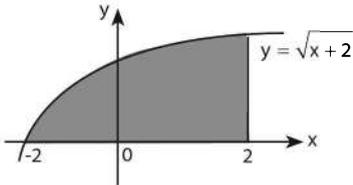
D. $13\frac{1}{3}$ satuan luas

B. $2\frac{2}{3}$ satuan luas

E. 16 satuan luas

C. $10\frac{2}{3}$ satuan luas

48. Luas kurva yang diarsir adalah



A. $10\frac{2}{3}$

D. $5\frac{1}{3}$

B. 8

E. 12

C. $2\frac{2}{3}$

49. Daerah D dibatasi oleh grafik fungsi $y = \sqrt{x}$, garis $x = 4$ dan sumbu x. Jika fungsi linier $y = kx$ (k konstanta) membagi daerah D atas dua bagian yang sama luasnya, maka $k =$

A. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{5}$

B. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{3}{8}$

C. $\frac{1}{4}$



STATISTIKA

22

A. UKURAN PEMUSATAN & UKURAN PENYEBARAN

a. Ukuran Pemusatan

Data: $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$

Data	Frek (f)
X_1	f_1
X_2	f_2
X_3	f_3
....
X_n	f_n

1. Rataan Hitung/Mean (\bar{x})

$$\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum X_i}{n}$$

2. **Kuartil (Q)** adalah nilai yang membagi sekelompok data yang sudah disusun berurutan dari yang terkecil sampai yang terbesar menjadi 4 bagian data yang sama banyaknya.

$$Q_1 = X_{\frac{1}{4}(n+1)}$$

$$Q_2 = X_{\frac{2}{4}(n+1)} \quad \rightarrow \text{untuk data ganjil}$$

$$Q_3 = X_{\frac{3}{4}(n+1)}$$

$$Q_1 = X_{\frac{1}{4}n + \frac{1}{2}}$$

$$Q_2 = X_{\frac{2}{4}n + \frac{1}{2}} \quad \rightarrow \text{untuk data genap}$$

$$Q_3 = X_{\frac{3}{4}n + \frac{1}{2}}$$

Catatan:

Q_1 = kuartil bawah

Q_2 = kuartil tengah = median = Me

Q_3 = kuartil atas

3. **Median (Me)** adalah nilai tengah dari data yang sudah disusun berurutan mulai dari data terkecil sampai data yang terbesar.
4. **Modus (Mo)** adalah nilai data yang paling sering muncul.

b. Ukuran Penyebaran

1. Jangkauan (J)

$$\begin{aligned} J &= \text{data terbesar} - \text{data terkecil} \\ &= X_{\text{maks}} - X_{\text{min}} \end{aligned}$$

2. Jangkauan Kuartil (JQ)

$$JQ = (Q_3 - Q_1)$$

3. Simpanan Kuartil (SQ)

$$SQ = \frac{1}{2} (Q_3 - Q_1)$$

4. Simpangan rata-rata (SR)

$$SR = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

6. Ragam/Varians (R)

$$R = S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

7. Simpangan baku / Deviasi standar (SB)

$$SB = \sqrt{S^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1.

Nilai	4	5	6	7	8	9
Frek	2	7	10	11	6	4

Rataan hitung, median, dan modus data pada tabel di atas berturut-turut adalah

- A. 6,5; 7; dan 7
- B. 6,6; 6,5; dan 7
- C. 6,6; 7; dan 7
- D. 6,7; 6,5; dan 7
- E. 7; 6,5; dan 7

Jawaban: C

Nilai	f	f.x
4	2	8
5	7	35
6	10	60
7	f	77
8	6	48
9	4	36

$$\Leftrightarrow \text{Rataan hitung} = \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{264}{40} = 6,6$$

$$\Leftrightarrow \text{Median (Me)} = \frac{1}{2} (\text{data ke 20} + \text{data ke 21})$$

$$= \frac{1}{2} (7 + 7) = 7$$

$$\Leftrightarrow \text{Modus (Mo)} = 7$$

2. Ditentukan data: 6, 7, 3, 2, 2, 2, 5, 4, 8. Jangkauan semi interkuartil dari data tersebut adalah

- A. 5,25
B. 2,25
C. 4
D. 2,125
E. 2

Jawaban: B

\Leftrightarrow data setelah diurutkan:

2	2	2	3	4	5	6	7	8
		↓		↓			↓	
		Q ₁		Q ₂			Q ₃	

\Leftrightarrow Jangkauan semiinterkuartil:

$$= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$$

$$= \frac{1}{2}(6,5 - 2) = 2,25$$

3. Tiga buah bilangan a, b, dan c dipilih sedemikian sehingga jika setiap bilangan ditambahkan ke rata-rata dua bilangan lainnya, maka hasilnya adalah 50, 60, dan 70. Rata-rata dari a, b, dan c adalah

- A. 20
B. 30
C. 40
D. 50
E. 60

Jawaban: B

$$\Leftrightarrow a + \frac{1}{2}(b + c) = 50 \rightarrow 2a + b + c = 100$$

$$b + \frac{1}{2}(a + c) = 60 \rightarrow 2b + a + c = 120$$

$$c + \frac{1}{2}(a + b) = 70 \rightarrow 2c + a + b = 140$$

$$4(a + b + c) = 360$$

$$\underline{a + b + c = 90}$$

$$\Leftrightarrow \text{Jadi, rata-rata dari } a, b, \text{ dan } c \text{ adalah } = \frac{90}{3} = 30$$

4. Ragam (varians) dari data: 6, 8, 6, 7, 8, 7, 9, 7, 7, 6, 7, 8, 6, 5, 8, 7 adalah

- A. 1
B. $1\frac{3}{8}$
C. $1\frac{1}{8}$
D. $\frac{7}{8}$
E. $\frac{5}{8}$

Jawaban: A

data	frek
5	1
6	4
7	6
8	4
9	1
=Σ 16	

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{5(1) + 6(4) + 7(6) + 8(4) + 9(1)}{16}$$

$$= \frac{112}{16} = 7$$

$$\Leftrightarrow \text{Ragam} = \frac{\sum_i^n f_i(x_i - \bar{x})^2}{\sum_i^n f_i}$$

⇔ Jumlah data baru:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{3}x_1 + 3\right), \left(\frac{1}{3}x_2 + 5\right), \dots, \left\{\frac{1}{3}x_n + (2n-1)\right\} \\ &= \frac{1}{3} \underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}_{an} + \underbrace{(3 + 5 + \dots + 2n - 1)}_{S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)} \\ &= \frac{1}{3}(an) + \frac{n}{2}(3 + 2n - 1) \\ &= \frac{1}{3}an + n^2 + 2n \end{aligned}$$

7. Umur rata-rata (rata-rata hitung) dari suatu kelompok yang terdiri dari dokter dan jaksa adalah 40. Jika umur rata-rata para dokter adalah 35 tahun dan umur rata-rata para jaksa adalah 50 tahun, maka perbandingan banyaknya dokter dan banyaknya jaksa adalah
- A. 3: 2
B. 3: 1
C. 2: 3
D. 2: 1
E. 1: 2

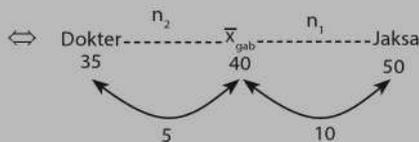
Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \bar{x} &= \frac{n_1 \cdot \bar{x}_1 + n_2 \cdot \bar{x}_2}{n_1 + n_2} \\ 40 &= \frac{n_1(35) + n_2(50)}{n_1 + n_2} \\ 40n_1 + 40n_2 &= 35n_1 + 50n_2 \\ 5n_2 &= 10n_1 \\ \frac{n_1}{n_2} &= \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

SOLUSI SMART!-1

Dari soal diketahui: $\bar{x}_{gab} = 40, \bar{x}_1 = 35, \bar{x}_2 = 50$

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \left| \frac{\bar{x}_{gab} - \bar{x}_2}{\bar{x}_{gab} - \bar{x}_1} \right| = \left| \frac{40 - 50}{40 - 35} \right| = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

SOLUSI SMART!-2

$$\Leftrightarrow \frac{n_1}{n_2} = \left| \frac{40 - 50}{40 - 35} \right| = \frac{10}{5} = \frac{2}{1}$$

8. Tiga kelas A, B, dan C berturut-turut terdiri dari 15 siswa, 10 siswa, dan 25 siswa. Rata-rata nilai gabungan dari ketiga kelas adalah 58,6. Jika rata-rata nilai kelas A dan C berturut-turut 62 dan 60, maka rata-rata nilai kelas B adalah
- A. 50
B. 56
C. 61
D. 63
E. 65

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \bar{x} = \frac{n_A \cdot \bar{x}_A + n_B \cdot \bar{x}_B + n_C \cdot \bar{x}_C}{n_A + n_B + n_C}$$

$$58,6 = \frac{15(62) + 10 \cdot \bar{x}_B + 25(60)}{15 + 10 + 25}$$

$$(58,6)(50) = 2430 + 10 \cdot \bar{x}_B$$

$$10 \cdot \bar{x}_B = 2930 - 2430 = 500$$

$$\bar{x}_B = 50$$

b. Modus (M_o)

$$M_o = t_b + c \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right)$$

t_b = tepi bawah kelas modus

c = panjang interval kelas

f_0 = frekuensi kelas modus

f_{-1} = frekuensi sebelum kelas modus

f_{+1} = frekuensi sesudah kelas modus

$d_1 = f_0 - f_{-1}$ & $d_2 = f_0 - f_{+1}$

c. Kuartil (Q)

$$Q_1 = t_b + c \left(\frac{\frac{i \cdot n}{4} - \sum f_i}{f_q} \right)$$

t_b = tepi bawah kuartil ke- i

c = panjang interval kelas

n = banyaknya data

$\sum f_i$ = jumlah semua frekuensi sebelum kelas kuartil ke- i

f_q = frekuensi kelas kuartil ke- i

Q_i = kuartil ke- i

Q_1 = kuartil bawah

Q_2 = kuartil tengah = Me (median)

Q_3 = kuartil atas

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 2

Bacaan ini untuk menjawab soal 10, 11, dan 12

Seorang pengamat ingin mengetahui data tentang rata-rata, median, dan modus dari seluruh siswa di satu kelas SMA. Setelah dikelompokkan pengamat tersebut menyajikan data tabel berikut.

Berat badan	frekuensi
50 – 54	6
55 – 59	12
60 – 64	20
65 – 69	8
70 – 74	4

10. Nilai rata-rata distribusi frekuensi di atas adalah

- A. $61\frac{1}{5}$ D. 62
 B. $61\frac{1}{4}$ E. $62\frac{1}{4}$
 C. $61\frac{1}{2}$

Jawaban: A

Kelas Interval	f	f	d	f
50–54	6	52	-10	-60
55–59	12	57	-5	-60
60–64	20	62	0	0
65–69	8	67	5	40
70–74	4	72	10	40
Jumlah	50			-40

⇔ Misal: rata-rata sementara = $\bar{x}_s = 62$

Catatan: $d = \bar{x}_s - x_i$

$$\bar{x} = \bar{x}_s + \frac{\sum f \cdot d}{\sum f}$$

$$\bar{x} = 62 + \left(\frac{-40}{50} \right)$$

$$= 61\frac{1}{5}$$

11. Median distribusi frekuensi di atas adalah

- A. $61\frac{1}{5}$
- B. $61\frac{1}{4}$
- C. $61\frac{1}{2}$
- D. 62
- E. $62\frac{1}{4}$

Jawaban: B

⇔ Kelas median pada interval: (60 – 64)

$$\begin{aligned} \text{Me} &= T_b + c \cdot \left(\frac{\frac{i.n}{4} - \sum f_i}{f_q} \right) \\ &= 59,5 + 5 \cdot \left(\frac{\frac{2}{4}(50) - (6 + 12)}{20} \right) \\ &= 59,5 + \left(\frac{7}{4} \right) \\ &= 61\frac{1}{4} \end{aligned}$$

12. Modus distribusi frekuensi di atas adalah

- A. $61\frac{1}{5}$
- B. $61\frac{1}{4}$
- C. $61\frac{1}{2}$
- D. 62
- E. $62\frac{1}{4}$

Jawaban: C

⇔ Kelas modus ada pada interval (60–64)

$$d_1 = 20 - 12 \text{ dan } d_2 = 20 - 8$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow Mo &= Tb + c \cdot \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \\ &= 59,5 + 5 \cdot \left(\frac{8}{8 + 12} \right) \\ &= 61,5 \end{aligned}$$

13. Data berikut adalah tinggi badan sekelompok siswa.

Tinggi (cm)	Frek
151 – 155	5
156 – 160	20
161 – 165	K
166 – 170	26
171 – 175	7

Jika median data di atas 163,5 cm, maka nilai k adalah

- A. 40
B. 42
C. 44
D. 46
E. 48

Jawaban: A

⇔ Interval kelas median pada interval:

$$161 - 165 \rightarrow T_b = 161 - 0,5 = 160,5$$

$$Me = T_b + p \left(\frac{\frac{i.n}{4} - \sum f_i}{f_q} \right)$$

$$163,5 = 160,5 + 5 \left(\frac{\frac{1}{2}(58 + k) - 25}{k} \right)$$

$$3 = 5 \left(\frac{58 + k - 50}{2k} \right)$$

$$6k = 40 + 5k \rightarrow k = 40$$

14.

Skor	Frekuensi
11–20	3
21–30	7
31–40	10
41–50	16
51–60	20
61–70	14
71–80	10
81–90	6
91–100	4

Daftar distribusi frekuensi di atas menyatakan hasil ulangan matematika. Siswa yang lulus mendapat nilai dari 55,5. Maka banyak siswa yang lulus adalah

- A. 36
B. 44
C. 54
D. 56
E. 60

Jawaban: B

⇔ Jumlah siswa seluruhnya = 90

⇔ Misal x = Jumlah siswa yang tidak lulus

$$\Leftrightarrow 55,5 = 50,5 + 10 \left(\frac{x - (16 + 10 + 7 + 3)}{20} \right)$$

$$5 = \left(\frac{x - (16 + 10 + 7 + 3)}{2} \right)$$

$$10 = x - 36 \rightarrow x = 46$$

Banyak siswa yang tidak lulus = 46

⇔ Banyaknya siswa yang lulus
= $90 - 46 = 44$

TIPS....PRAKTIS

⇨ Nilai 55,5 ada pada interval kelas: 51–60

- tepi bawah: 50,5
- tepi atas: 60,5



⇨ Banyaknya siswa yang lulus

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5}{10}(20) + \text{jmlh siswa yg sudah pasti lulus} \\
 &= 10 + (14 + 10 + 6 + 4) \\
 &= 44 \text{ siswa}
 \end{aligned}$$

15. Diberikan data pada tabel berikut.

Titik tengah	frekuensi
52	4
57	6
62	8
67	10
72	14
77	x
82	6

Jika pada tabel ini kuartil atas adalah 75,75, maka nilai x adalah

- | | |
|-------|-------|
| A. 9 | D. 12 |
| B. 10 | E. 13 |
| C. 11 | |

Jawaban: D

⇨ Kuartil atas ada di titik tengah 77 atau pada interval: (75–79)
Kuartil atas adalah:

$$Q_3 = t_b + c \left(\frac{\frac{3 \cdot n}{4} - \sum f_3}{f_{q_3}} \right)$$

$$75,75 = 74,5 + 5 \left(\frac{\frac{3(48+x)}{4} - 42}{x} \right)$$

$$1,25 = 5 \left(\frac{\frac{3(48+x)}{4} - 42}{x} \right)$$

$$0,25x = \frac{3(48+x)}{4} - \frac{168}{4} \rightarrow \text{dikali } \frac{x}{5}$$

$$x = 144 + 3x - 168$$

$$24 = 2x \rightarrow x = 12$$

C. PERUBAHAN DATA

a. Pada Ukuran Pemusatan

Ukuran pemusatan (mean, median, modus, kuartil) akan berubah jika setiap data ditambah/dikurang, dikali/dibagi dengan bilangan yang tetap.

Jenis data	(x , Mo , Me , Qi)
bila setiap data di (+, -) dengan p	ukuran semula di (+, -) dengan p
bila setiap data di (x ,:) dengan p	ukuran semula di (x ,:) dengan p

• **Pada Ukuran Penyebaran**

Ukuran penyebaran (jangkauan, simpangan baku, simpangan kuartil, simpangan rata-rata) akan berubah jika setiap data dikali/dibagi dengan bilangan yang tetap.

Jenis data	(J, SR, S, Qd)
bila setiap data di (+, -) dengan p	ukuran semula tetap
bila setiap data di (x _;) dengan p	ukuran semula di (x _;) dengan p

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

16. Diketahui data: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{10}$. Jika tiap nilai data ditambah 10, maka:

- (1) rata-rata akan bertambah 10
- (2) jangkauan bertambah 10
- (3) median bertambah 10
- (4) simpangan kuartil bertambah 10

Pernyataan yang benar adalah

- A. (1), (2), dan (3)
- B. (1) dan (3)
- C. (2) dan (4)
- D. (4) saja
- E. (1), (2), (3) dan (4)

Jawaban: B

Perubahan data	Ditambah 10
Rata-rata (\bar{x}_o)	$\bar{x}' = \bar{x}_o + 10$
Median (M_e)	$M_e' = M_e + 10$
Simp kuartil (S_q)	$S_q' = S_q$
Jangkauan (J_o)	$J' = J_o$

⇔ sehingga jika tiap data ditambah 10 yang berubah hanya rata-rata dan median

Perubahan data	Dikurang 1500
Jangkauan (J)	$J' = J$
Rata-rata (\bar{x})	$\bar{x}' = \bar{x} - 1500$
Simpangan kuartil (Sq)	$Sq' = Sq$
Modus (Mo)	$Mo' = Mo - 1500$

$$\Leftrightarrow J' = J = 40 \rightarrow J = 40$$

$$\Leftrightarrow \bar{x}' = \bar{x} - 1500$$

$$15 = \bar{x} - 1500 \rightarrow \bar{x} = 1515$$

$$\Leftrightarrow Sq' = Sq = 15$$

$$\Leftrightarrow mo' = mo - 1500$$

$$16 = mo - 1500$$

$$mo = 1516$$

LATIHAN SOAL 22

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Jika rata-rata dari $(a - 2)$, $(b + 3)$, $(c + 5)$ adalah 6, maka rata-rata dari $(a + 4)$, $(b + 6)$, $(c - 1)$ adalah
A. 5
B. 6
C. 7
D. 8
E. 9
2. Simpangan baku dari data: 20, 20, 22, 24, 26, 24, 24, 28, 28 adalah
A. $\frac{2}{3}\sqrt{5}$
B. $\frac{2}{3}\sqrt{11}$
C. $2\sqrt{2}$
D. $2\sqrt{5}$
E. $6\sqrt{2}$
3. Rata-rata 4 buah data adalah 5, jika data ditambah satu lagi maka rata-rata menjadi 5,5, maka besarnya data perubahan yang mungkin terpilih adalah
A. 7,5
B. 7
C. 6,5
D. 6
E. 5,5

4. Tabel di bawah adalah hasil ulangan matematika. Dari tabel itu berapa siswa yang mendapat 69 atau kurang?

Nilai	f
40–49	6
50–59	10
60–69	12
70–79	6
80–89	7
90–99	1
$\Sigma f = 42$	

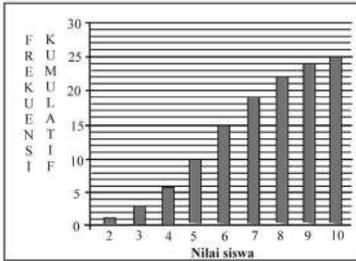
- A. 26
 B. 27
 C. 28
 D. 34
 E. 41
5. Dari hasil ujian 30 siswa diperoleh data berikut.

Nilai Ujian	Frekuensi
21–30	1
31–40	1
41–50	a
51–60	9
61–70	f
71–80	f
81–90	f

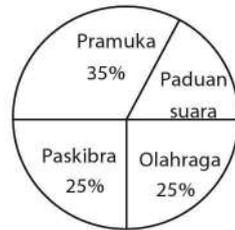
Siswa yang dinyatakan lulus bilamana nilainya lebih besar dari pada 60. Jika banyaknya siswa yang lulus adalah 16 orang, maka nilai a adalah

- A. 18
 B. 20
 C. 24
 D. 25
 E. 30

6. Jika diagram batang di bawah ini memperlihatkan frekuensi kumulatif hasil tes matematika siswa kelas XII, maka persentase siswa yang memperoleh nilai 8 adalah



- A. 12 %
 B. 15 %
 C. 20 %
 D. 22 %
 E. 80 %
7. Diagram lingkaran berikut ini menyatakan jenis ekstrakurikuler di suatu SMA yang diikuti 400 siswa. Banyak siswa yang mengikuti ekstrakurikuler paduan suara adalah
- A. 20
 B. 40
 C. 60
 D. 80
 E. 100



8. x_0 adalah rata-rata dari data x_1, x_2, \dots, x_{10} . Jika data berubah mengikuti pola $\frac{1}{2}x_1 + 2, \frac{1}{2}x_2 + 4, \frac{1}{2}x_3 + 6, \dots$ dan seterusnya, maka nilai rata-rata menjadi
- A. $x_0 + 11$
 B. $x_0 + 12$
 C. $\frac{1}{2}x_0 + 11$
 D. $x_0 + 12$
 E. $\frac{1}{2}x_0 + 20$

9. Dengan jumlah siswa 25 orang mempunyai nilai rata-rata matematika 7,1. Jika nilai yang terkecil tidak diperhitungkan rata-rata kelas menjadi 7,15. Jika nilai yang terbesar tidak diperhitungkan rata-rata kelas menjadi 7, maka jangkauan nilai adalah
- A. 3,2
B. 3,4
C. 3,6
D. 3,8
E. 4,0
10. Empat kelompok siswa yang masing-masing terdiri dari 5, 8, 10, dan 17 orang menyumbang korban bencana alam. Rata-rata sumbangan masing-masing kelompok adalah Rp4000, Rp2500, Rp2000, Rp1000. Maka rata-rata sumbangan tiap siswa seluruh kelompok adalah
- A. Rp1.050
B. Rp1.255
C. Rp1.925
D. Rp2.015
E. Rp2.275
11. Data berikut adalah hasil ujian suatu kelas di SMU yang nilai rata-ratanya adalah \bar{x} .

Nilai	3	4	5	6	7	8
Frekuensi	2	4	8	12	16	4

Siswa dinyatakan lulus bila nilainya lebih besar atau sama dengan $\bar{x} - 1$. Banyaknya siswa yang lulus ujian ini adalah

- A. 20
B. 28
C. 32
D. 36
E. 40
12. Nilai rata-rata ulangan kelas A adalah \bar{x}_A dan kelas B adalah \bar{x}_B . Setelah kedua kelas digabung, nilai rata-ratanya adalah \bar{x} . Jika $\bar{x}_A : \bar{x}_B = 10 : 9$ dan $\bar{x} : \bar{x}_B = 85 : 81$, maka perbandingan banyaknya siswa di kelas A dan B adalah
- A. 8 : 9
B. 4 : 5
C. 3 : 4
D. 3 : 5
E. 9 : 10

13. Nilai rata-rata tes matematika dari kelompok siswa dan kelompok siswi di suatu kelas berturut-turut adalah 5 dan 7. Jika nilai rata-rata di kelas tersebut adalah 6,2, maka perbandingan banyaknya siswa dan siswi adalah
- A. 2:3
B. 3:4
C. 2:5
D. 3:5
E. 4:5
14. Pada suatu ujian yang diikuti 10 siswa (nilai sudah diurutkan dari yang paling kecil sampai yang besar) diperoleh rata-rata ujian adalah 6 dengan median 5 dan jangkauan 4. Jika 5 data pertama dikurangi 1 dan sisanya ditambah 2, maka jumlah rata-rata, median dan jangkauan adalah
- A. 15
B. 16
C. 17
D. 18
E. 19
15. Dua kelompok anak masing-masing terdiri dari 4 anak, mempunyai rata-rata berat badan 20 kg dan 25 kg. Kalau seorang anak dari masing-masing kelompok ditukarkan, maka ternyata rata-rata berat badan menjadi sama, selisih berat badan kedua anak yang ditukar adalah
- A. 4 kg
B. 5 kg
C. 6 kg
D. 8 kg
E. 10 kg
16. Ani telah mengikuti tes matematika sebanyak n kali. Pada tes berikutnya ia memperoleh nilai 83 sehingga nilai rata-rata Ani adalah 80. Tetapi, jika nilai tes tersebut 67, maka rata-ratanya adalah 76. Nilai n adalah
- A. 2
B. 3
C. 4
D. 5
E. 6

17. Siswa-siswi kelas XI A mengikuti tes matematika dengan hasil sebagai berikut. Lima siswa memperoleh skor 100, siswa yang lain memperoleh skor minimal 60, dan rata-rata skor semua siswa adalah 75. Banyak siswa pada kelas tersebut paling sedikit adalah
- A. 12
B. 13
C. 14
D. 15
E. 16
18. Dari 4 bilangan diketahui bilangan yang terkecil adalah 20 dan yang terbesar adalah 48. Rata-rata hitung keempat bilangan tersebut tidak mungkin
- (1) < 26
(2) < 25
(3) > 42
(4) > 43
- Pernyataan yang benar adalah
- A. (1), (2), dan (3)
B. (1) dan (3)
C. (2) dan (4)
D. (4) saja
E. (1), (2), (3) dan (4)
19. Nilai rata-rata ulangan matematika dari suatu kelas adalah 6,9. Jika dua siswa baru yang nilainya 4 dan 6 digabungkan, maka nilai rata-rata kelas tersebut menjadi 6,8. Banyaknya siswa semula adalah
- A. 36
B. 38
C. 40
D. 42
E. 44
20. Dua kelompok anak masing-masing terdiri dari 4 anak, mempunyai rata-rata berat badan 30 kg dan 33 kg. Kalau seorang anak dari masing-masing kelompok ditukarkan, maka ternyata rata-rata berat badan menjadi sama, selisih berat badan kedua anak yang ditukar adalah
- A. 1,5 kg
B. 2 kg
C. 4 kg
D. 6 kg
E. 8 kg

SOAL LATIHAN - 2

21. Rata-rata distribusi frekuensi dari data berkelompok di bawah ini dengan menggunakan rata-rata sementara 57 adalah

Nilai	f	d	f.d
40–44	2		
45–49	8		
50–54	15		
55–59	10	0	
60–64	5		
65–69	10		

- A. 58,5
B. 55,8
C. 54,8
D. 53,8
E. 53,4

- 22.

Nilai	Frekuensi
50–54	3
55–59	7
60–64	a
65–69	13
70–74	6
75–79	2
80–84	1

Dari daftar distribusi frekuensi di atas, nilai modusnya adalah 63,5. Jika a adalah frekuensi yang tertinggi, maka nilai a =

- A. 14
B. 15
C. 16
D. 17
E. 18

23. Tabel di bawah ini adalah hasil ulangan matematika suatu kelas, maka modus dari data tersebut adalah

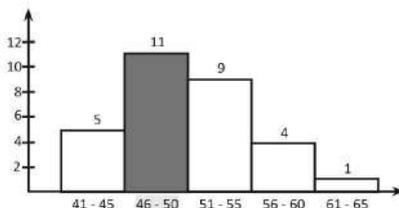
Nilai	Frekuensi
31–20	4
37–30	6
43–40	9
49–50	14
55–60	10
61–70	5
67–80	2

- A. 49,06
 B. 50,20
 C. 50,70
 D. 51,33
 E. 51,83
24. Simpangan kuartil dari data pada tabel di bawah ini adalah

Berat Badan (kg)	Frekuensi (f)
26–35	5
31–35	7
36–40	17
41–50	9
46–50	2

$$\sum f = 40$$

- A. 2 kg
 B. 3,3 kg
 C. 3,5 kg
 D. 7 kg
 E. 7,6 kg
25. Histogram berikut menyajikan data berat badan (dalam kg) 30 orang siswa Modus dari data tersebut adalah



- A. 47,50
- B. 48,25
- C. 47,75
- D. 49,25
- E. 49,75

26. Tabel di bawah adalah distribusi frekuensi hasil ulangan 40 orang siswa. Median dari data pada tabel di bawah ini adalah

Nilai	frekuensi
42–46	1
47–51	4
52–56	7
57–61	12
62–66	9
67–71	5
72–76	2

- A. $56\frac{5}{6}$
- B. $58\frac{1}{3}$
- C. $59\frac{1}{6}$
- D. $59\frac{1}{2}$
- E. $59\frac{5}{6}$

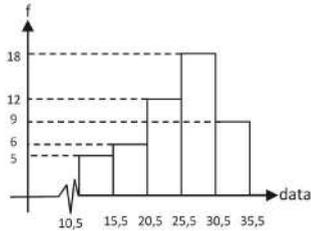
27. Perhatikan tabel berikut ini!

Pendapatan (dalam ratusan ribu rupiah)	Banyak orang tua
1–5	3
6–10	17
11–15	18
16–20	22
26–30	23
31–35	4

Disajikan data pendapatan orang tua siswa dari suatu sekolah. Modus dari data tersebut adalah

- A. Rp2.350.000
- B. Rp2.450.000
- C. Rp2.550.000
- D. Rp2.650.000
- E. Rp2.750.000

28. Nilai rata-rata dari data pada diagram berikut adalah



- A. 23
- B. 25
- C. 26
- D. 28
- E. 30

29. Median dari tabel berat badan di bawah ini adalah 64,5 kg. Nilai x yang memenuhi adalah

Berat badan (kg)	Frekuensi (f)
50–54	3
55–59	12
60–64	x
60–69	21
70–74	4

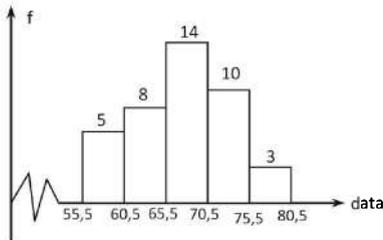
- A. 8
- B. 10
- C. 12
- D. 13
- E. 14

30. Rataan skor dari data pada tabel adalah

Skor	Frekuensi
0-4	2
5-9	6
10-14	8
15-19	10
20-24	8
25-29	4
30-34	2

- A. 15,5
 B. 15,8
 C. 16,3
 D. 16,5
 E. 16,8

31. Kuartil atas dari data pada gambar berikut adalah



- A. 71,5
 B. 72,0
 C. 72,5
 D. 73,0
 E. 73,5

32.

Tinggi Badan (cm)	f
155-157	2
158-160	10
161-163	12
164-166	20
167-169	25
170-172	15
173-175	11

Salah satu persyaratan seseorang dapat ikut tes pramugari adalah mereka yang memiliki tinggi badan minimal 165 cm. Data pada tabel menunjukkan 100 pelamar yang lolos persyaratan adalah

- A. 61
- B. 66
- C. 69
- D. 70
- E. 71

33.

Nilai	Frekuensi
21–30	2
31–40	3
41–50	5
51–60	10
61–70	11
71–80	15
81–90	8
91–100	5

Data di atas merupakan hasil suatu tes. Mereka yang memperoleh nilai lebih dari 57,5 dinyatakan lulus. Banyaknya peserta tes yang lulus adalah

- A. 40
- B. 41
- C. 42
- D. 43
- E. 44

34. Zaki ke sekolah menggunakan sepeda dengan kecepatan 20 km/jam dan pulang sekolah dengan kecepatan 15 km/jam. Rataan kecepatan pergi dan pulang sekolah adalah ... km/jam.

- A. 17,1
- B. 17,2
- C. 17,3
- D. 17,4
- E. 17,5

35. Daftar distribusi frekuensi pada tabel di bawah merupakan hasil dari suatu tes.

Nilai	Frekuensi
11–20	3
21–30	7
31–40	10
41–50	16
51–60	20
61–70	14
71–80	10
81–90	6
91–100	4

Jika 60% siswa dinyatakan lulus, maka nilai terendah yang dinyatakan lulus adalah

- A. 45,0
B. 48,5
C. 50,5
D. 55,5
E. 59,5
36. Data pada tabel berikut menunjukkan tinggi badan peserta seleksi pemain bola voli.

Tinggi badan (cm)	f
150–154	6
155–159	10
160–164	18
165–169	22
170–174	4
	60

Peserta yang lulus seleksi adalah mereka yang memiliki tinggi lebih dari 156 cm. Banyak peserta yang lulus seleksi adalah

- A. 44 orang
B. 46 orang
C. 48 orang
D. 49 orang
E. 51 orang

SOAL LATIHAN - 3

37. Dari hasil ulangan 50 siswa, diperoleh nilai rata-rata 54 dan jangkauan 70. Karena nilai rata-ratanya terlalu rendah, maka setiap nilai dikali 2 dan dikurangi 32. Nilai baru yang diperoleh mempunyai
- A. rata-rata 76, jangkauan 108
 - B. rata-rata 76, jangkauan 140
 - C. rata-rata 76, jangkauan 36
 - D. rata-rata 108, jangkauan 140
 - E. rata-rata 108, jangkauan 108
38. Pada suatu tes simulasi yang diikuti 50 siswa diperoleh nilai rata-rata matematika adalah 10. Karena nilai rata-rata terlalu rendah, maka semua nilai dikali 2, kemudian dikurangi 16. Jika nilai rata-rata yang baru sama dengan 2 kali simpangan baku yang baru, maka simpangan baku yang lama adalah
- A. 1
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4
 - E. 5
39. Suatu data dengan rata-rata 16 dan jangkauan 6. Jika setiap nilai dalam data dikalikan p kemudian dikurangi q didapat data baru dengan rata-rata 20 dan jangkauan 9. Nilai dari $2p + q = \dots$
- A. 3
 - B. 2
 - C. 7
 - D. 8
 - E. 9
40. Pada suatu ujian yang diikuti 50 siswa diperoleh rata-rata nilai ujian adalah 35 dengan median 40 dan simpangan baku 10. Karena rata-rata nilai terlalu rendah, maka semua nilai dikalikan 2, kemudian dikurangi 15. Akibatnya
- A. rata-rata nilai menjadi 70
 - B. rata-rata nilai menjadi 65
 - C. simpangan baku menjadi 20
 - D. simpangan baku menjadi 5
 - E. median menjadi 80



TEORI PELUANG

23

A. ATURAN PERKALIAN

Secara umum, jika suatu kejadian pertama dapat dilakukan dengan k_1 cara berbeda dan kejadian kedua dapat dilakukan k_2 cara berbeda, serta kejadian ketiga dapat dilakukan dengan k_3 cara berbeda, dan seterusnya, maka kejadian-kejadian tersebut dapat dilakukan secara berurutan dalam $(k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \dots)$ cara yang berbeda.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Dari kota A ke kota B dilayani oleh 4 bus dan dari B ke C oleh 3 bus. Seseorang berangkat dari kota A ke C melalui B kemudian kembali lagi ke A juga melalui B. Jika saat kembali dari C ke A, ia tidak mau menggunakan bus yang sama, maka banyak cara perjalanan orang tersebut adalah
A. 12
B. 36
C. 72
D. 96
E. 144

Jawaban: D

⇔ Banyaknya angka (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) = 10 angka

⇔ • satuan (7) = 1 nomor

• puluhan

9	1
---	---

 = 9 nomor
... 7

(kolom pertama 0 tidak termasuk)

1	9
---	---

 = 9 nomor
7 ...

(kolom kedua 7 tidak termasuk)

• ratusan < 150

1	5	1
---	---	---

 = 5 nomor
1 ... 7

(kolom ke dua hanya 0, 1, 2, 3, 4 = 5 angka)

⇔ Jadi, banyak rumah yang nomornya menggunakan angka 7 sekurang-kurangnya satu kali = (1 + 9 + 9 + 5) = 24 nomor

B. FAKTORIAL, PERMUTASI DAN KOMBINASI

a. Faktorial (!)

• $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1$

b. Permutasi

Permutasi adalah cara penyusunan dari elemen-elemen suatu himpunan dengan cara memperhatikan urutan.

• **Permutasi n anggota** adalah $P_{(n,n)} = {}_n P_n = n!$

• Permutasi n anggota yang memuat c_1, c_2, c_3, \dots anggota yang sama adalah $P_{(n,n)} = {}_n P_n = \frac{n!}{c_1! c_2! c_3! \dots}$

• **Permutasi r anggota dari n anggota** adalah $P_{(n,r)} = {}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
, $0 < r < n$

- **Permutasi siklis/melingkar** dari n anggota adalah

$$P_{(n,n)\text{siklis}} = {}_n P_n = (n-1)!$$

c. Kombinasi

Kombinasi adalah cara penyusunan dari elemen-elemen suatu himpunan dengan cara tidak memperhatikan urutan

- **Kombinasi r elemen dari n elemen** adalah:

$$C_r^n = C_{(n,r)} = {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}, 0 < r < n$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

5. Nilai n yang memenuhi persamaan $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 6n$, adalah

- | | |
|------|------|
| A. 1 | D. 4 |
| B. 2 | E. 5 |
| C. 3 | |

Jawaban: A

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)!}{(n-1)!} = 6n$$

$$\frac{(n+2)(n+1)(n)\cancel{(n-1)\dots 1}}{\cancel{(n-1)\dots 1}} = 6n$$

$$n^3 + 3n^2 + 2n = 6n$$

$$n^3 + 3n^2 - 4n = 0$$

$$n(n^2 + 3n - 4) = 0$$

$$n(n+4)(n-1) = 0$$

\Leftrightarrow Nilai n yang memenuhi adalah 1

$$P_{(n,n)} = {}_n P_n = n!$$

6. Selesai pertandingan tim basket SMA yang terdiri dari 5 orang akan berfoto bersama pelatih. Banyak cara mereka dapat berfoto bersama jika posisi pelatih berada di paling kiri atau paling kanan adalah
- A. 10 cara
 B. 20 cara
 C. 60 cara
 D. 120 cara
 E. 240 cara

Jawaban: E

⇔ Misal: p = pelatih

Kemungkinan formasi foto bersama

• p x x x x x → $5! = 120$ formasi

• x x x x x p → $5! = 120$ formasi

⇔ Jadi, banyak cara mereka berfoto bersama jika posisi pelatih berada di paling kiri atau paling kanan = $(120 + 120) = 240$ formasi

7. Tiga pasang suami istri duduk berdampingan pada satu baris. Jika setiap pasang suami istri harus duduk berdampingan, maka banyak cara mereka duduk adalah
- A. 6
 B. 12
 C. 18
 D. 24
 E. 48

Jawaban: E

⇔ misal: ab = pasangan I

cd = pasangan II

ef = pasangan III

⇔ • Formasi duduk:

$(ab)(cd)(ef) \rightarrow 3! = 6$ cara

- Jika masing-masing pasangan bertukar tempat duduk = $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$ cara.

⇔ Jadi, banyak cara jika setiap pasang suami istri harus duduk berdampingan adalah $(6) \cdot (8) = 48$ cara.

$$P_{(n,n)} = {}_n P_n = \frac{n!}{c_1! c_2! c_3! \dots}$$

8. Banyaknya cara untuk menempatkan 3 anak laki-laki dan 2 anak perempuan duduk berjajar tanpa membedakan tiap anak adalah

....

- | | |
|------------|------------|
| A. 24 cara | D. 15 cara |
| B. 18 cara | E. 10 cara |
| C. 16 cara | |

Jawaban: E

⇔ 3 laki-laki = L L L

2 perempuan = P P

⇔ Jadi, banyaknya cara duduk berjajar untuk menempatkan 3 anak laki-laki dan 2 perempuan tanpa membedakan tiap anak

adalah $\frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ cara

9. Kode kupon hadiah untuk belanja pada suatu toko swalayan berbentuk bilangan yang disusun dari angka 1, 3, 3, 5, 7. Jika kupon-kupon tersebut disusun berdasarkan kodenya mulai dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar, maka kupon dengan kode 53137 berada pada urutan ke

- | | |
|-------|-------|
| A. 52 | D. 24 |
| B. 40 | E. 20 |
| C. 39 | |

Jawaban: B

⇔ Kemungkinan urutan kupon yang disusun dari angka (1, 3, 3, 5, 7) adalah:

• 1 3 3 5 7 → $\frac{4!}{2!} = 12$ kupon

• 3 1 3 5 7 → $4! = 24$ kupon

- $5 \ 1 \ 3 \ 3 \ 7 \rightarrow \frac{3!}{2!} = 3$ kupon

- $5 \ 3 \ 1 \ 3 \ 7 \rightarrow$ urutan ke 40.

$$P_{(n,r)} = {}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

10. Dalam suatu ruang tunggu tersedia hanya 3 kursi, bila di ruang tunggu tersebut ada 20 orang maka banyaknya cara mereka duduk berdampingan adalah

- A. 6840 cara
- B. 2280 cara
- C. 1400 cara
- D. 1140 cara
- E. 684 cara

Jawaban: A

⇔ banyaknya cara mereka duduk berdampingan adalah:
= memilih 3 orang dari 20 orang

$$\begin{aligned} &= P_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} \\ &= \frac{(20) \cdot (19) \cdot (18)}{1} = 6840 \end{aligned}$$

11. A dan B pergi menonton konser musik di suatu stadion yang mempunyai 8 pintu. Mereka masuk dari pintu yang sama, tetapi keluar dari pintu yang berbeda. Banyaknya cara yang dapat mereka lakukan adalah

- A. 28
- B. 224
- C. 448
- D. 484
- E. 896

Jawaban: C

⇔ Cara masuk = 8 cara

$$\text{Cara keluar} = {}_2 P_8 = \frac{8!}{(8-2)!} = 8 \cdot 7 = 56$$

⇔ Banyak cara masuk dan keluar dari 2 orang tersebut = $8 \cdot (56) = 448$ cara

12. Banyaknya bilangan ganjil yang terdiri dari 3 angka yang disusun 2, 3, 4, 6, 7, dan 8 tanpa ada pengulangan adalah

- A. 24
- B. 28
- C. 40
- D. 60
- E. 120

Jawaban: C

⇔ Bilangan ganjil yang terdiri 3 angka dari angka: 2, 3, 4, 6, 7, dan 8 adalah

$$x \quad x \quad 3 \rightarrow P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

$$x \quad x \quad 7 \rightarrow P_2^5 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$$

Banyaknya bilangan ganjil ada 40 bilangan

SOLUSI SMART!

⇔

4	5	2
---	---	---

 = 40 bilangan

kolom 3 = ada 2 angka yaitu 3 dan 7

kolom 2 = ada 5 angka (berkurang 1 angka → dipakai di kolom 1)

kolom 1 = ada 4 angka (berkurang 2 angka → dipakai di kolom 2 dan 3)

13. Akan dibuat nomor-nomor undian yang terdiri atas satu huruf dan diikuti dua buah angka yang berbeda dan angka kedua adalah bilangan genap. Banyaknya nomor undian ada

- A. 1160
- B. 1165
- C. 1170
- D. 1180
- E. 1185

Jawaban: C

SOLUSI SMART!

- ⇔ Banyaknya huruf = 26 huruf
Angka genap = 0, 2, 4, 6, 8 = 5 angka

4	5	2
---	---	---

- ⇔ Banyaknya nomor undian = $(26) \cdot (9) \cdot (5) = 1170$

14. Suatu sekolah membentuk tim delegasi yang terdiri dari 4 anak kelas I, 5 anak kelas II, dan 6 anak kelas III. Kemudian akan ditentukan pimpinan yang terdiri dari ketua, wakil ketua, dan sekretaris. Jika kelas asal ketua harus lebih tinggi dari kelas asal wakil ketua dan sekretaris, maka banyaknya kemungkinan susunan pimpinan adalah

....

- A. 156
B. 492
C. 546
D. 600
E. 720

Jawaban: B

⇔ Kemungkinannya adalah:

- Ketua dari Kelas III dan Wakil Ketua serta Sekretaris dari kelas II dan I

$$\begin{aligned} &= P_{1(\text{ketua})}^{6(\text{klsIII})} \cdot P_{2(\text{W Ketua\&Sekretaris})}^{9(\text{klsII\&I})} \\ &= (6) \cdot (72) = 432 \end{aligned}$$

- Ketua dari Kelas II dan Wakil Ketua serta Sekretaris dari kelas I

$$\begin{aligned} &= P_{1(\text{ketua})}^{5(\text{klsII})} \cdot P_{2(\text{W Ketua\&Sekretaris})}^{4(\text{klsI})} \\ &= (5) \cdot (12) = 60 \end{aligned}$$

⇔ Semuanya = $432 + 60 = 492$

SOLUSI SMART!

⇔ Jika ketua dari kelas III

K	W	S
---	---	---

6	9	8
---	---	---

 = 432

⇔ Jika ketua dari kelas III

K	W	S
---	---	---

5	4	3
---	---	---

 = 60

⇔ Banyaknya kemungkinan = 492 susunan

$$P_{(n,n)\text{siklis}} = {}_n P_n = (n-1)!$$

15. Dalam suatu rapat yang dihadiri oleh 5 peserta duduk melingkar. Dalam berapa cara mereka duduk dengan urutan yang berbeda?
- A. 4
B. 8
C. 16
D. 20
E. 24

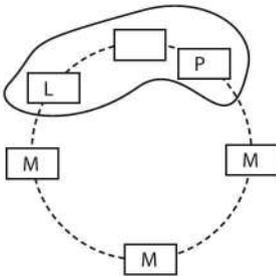
Jawaban: E

⇔ $n = 5$

⇔ Banyak cara mereka duduk adalah $= (5 - 1)! = 4! = 24$ cara

16. Enam kursi melingkari sebuah meja. Kursi tersebut akan diduduki oleh 5 anak terdiri dari 3 perempuan dan 2 laki-laki. Jika kursi yang kosong diapit oleh anak laki-laki dan perempuan, maka banyaknya susunan cara duduk adalah
- A. 648
B. 564
C. 432
D. 288
E. 216

Jawaban: C



- Bangku kosong diapit oleh laki-laki dan perempuan, sehingga $n = 4$ Banyaknya formasi duduk melingkar $= (4 - 1)! = 3! = 6$
 - Posisi laki-laki dan perempuan yang mengapit bangku kosong bisa bergantian $= 2! = 2$
 - Posisi laki-laki yang mengapit bangku kosong bisa bergantian $\rightarrow C_1^2 = 2$
 - Posisi perempuan yang mengapit bangku kosong bisa bergantian $\rightarrow C_1^3 = 3$
 - Posisi bangku kosong yang diapit bisa bergantian \rightarrow ada 6 bangku kosong
- \Leftrightarrow Banyaknya susunan cara duduk supaya kursi yang kosong selalu diapit laki-laki dan perempuan adalah:
- $$= 3! \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6$$
- $$= 432 \text{ cara.}$$

$$C_r^n = C_{(n,r)} = {}_n C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

17. Dari 10 orang finalis suatu lomba kecantikan akan dipilih secara acak 3 yang terbaik. Banyak cara pemilihan tersebut ada
- | | |
|-------------|-------------|
| A. 70 cara | D. 360 cara |
| B. 80 cara | E. 720 cara |
| C. 120 cara | |

Jawaban: C

⇔ Banyaknya cara memilih 3 dari 10 orang

$$= C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{(10)(9)(8)}{(3)(2)(1)} = 120 \text{ cara}$$

18. Enam orang bepergian dengan dua mobil milik dua orang di antara mereka. Masing-masing mobil dikemudikan oleh pemiliknya dan kapasitas mobil masing-masing adalah 4 orang termasuk pengemudi. Banyak cara menyusun penumpang di kedua mobil tersebut adalah

- A. 10
B. 14
C. 24
D. 54
E. 96

Jawaban: B

⇔ Misal: A = pengemudi mobil I

B = pengemudi mobil II

A	3	2	1
B	1	2	3
	C_3^4	C_2^4	C_1^4

⇔ Jadi, banyak cara menyusun penumpang di kedua mobil tersebut adalah: $C_3^4 + C_2^4 + C_1^4 = 4 + 6 + 4 = 14$ cara

19. Lima pasang suami istri pergi ke suatu pesta pernikahan dengan menumpang 2 buah mobil yang masing-masing dengan kapasitas 6 orang. Jika setiap pasang harus naik pada mobil yang sama, maka banyaknya cara pengaturan penumpang kedua buah mobil tersebut adalah

- A. 12
B. 14
C. 16
D. 20
E. 24

Jawaban: D

Kemungkinan cara pengaturan penumpang = 2 pasang suami istri mobil pertama kemudian 3 pasang suami istri mobil kedua:

$$C_2^5 + C_3^5 = 10 + 10 = 20 \text{ cara}$$

20. Seorang murid diminta mengerjakan 8 dari 10 soal ulangan, tapi nomor 1 sampai dengan 5 harus dikerjakan. Banyaknya pilihan yang dapat diambil murid tersebut adalah
- A. 3
B. 5
C. 6
D. 8
E. 10

Jawaban: E

$$\Leftrightarrow \begin{array}{cccccccc} x & x & x & x & x & x & x & x & x \\ & & & & \underbrace{\hspace{4em}} & & & & \\ & & & & \text{soal sisa} & & & & \end{array}$$

Soal no 1 sampai 5 wajib dikerjakan, sehingga tinggal memilih 3 soal dari 5 soal yang tersisa adalah $C_3^5 = 10$ pilihan

21. Suatu tim bulutangkis terdiri dari 10 orang putra dan 5 orang putri. Dari tim ini akan dibuat pasangan ganda, baik ganda putra, ganda putri, maupun ganda campuran. Banyak pasangan ganda yang dapat dibuat adalah
- A. 45
B. 50
C. 55
D. 95
E. 105

Jawaban: E

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Ganda putra} &= C_2^{10} = 45 \\ \text{Ganda putri} &= C_2^5 = 10 \\ \text{Ganda campuran} &= C_{1\text{putra}}^{10} \cdot C_{1\text{putri}}^5 \\ &= (10) \cdot (5) = 50 \end{aligned}$$

⇔ Pasangan ganda yang terbentuk adalah $45 + 10 + 50 = 105$ pasangan

SOLUSI SMART!

⇔ Memilih 2 dua pemain dari 15 pemain $C_2^{15} = 105$ pasangan.

22. Linda memiliki delapan teman akrab. Dia ingin mengundang tiga dari delapan temannya untuk diajak makan bersama. Tetapi dua di antara mereka adalah pasangan suami istri. Kedua suami istri diundang atau keduanya tidak diundang. Banyak kemungkinan cara Linda mengundang temannya adalah

- A. 18
- B. 20
- C. 22
- D. 24
- E. 26

Jawaban: E

⇔ kalau suami istri diundang $= C_1^6 = 6$

⇔ kalau suami istri tidak diundang $= C_3^6 = 20$

⇔ Banyak kemungkinan cara Linda mengundang temannya adalah $6 + 20 = 26$

C. PELUANG KEJADIAN

a. Peluang Kejadian

1. Peluang kejadian

Jika suatu kejadian A dapat terjadi dalam K cara dari seluruh S cara yang mungkin, maka peluang kejadian A dapat dirumuskan sebagai berikut.

$$p(A) = \frac{n(K)}{n(S)} \text{ dan } 0 \leq p(A) \leq 1$$

2. Frekuensi harapan suatu kejadian

Jika peluang kejadian A adalah $p(A)$, maka frekuensi harapan kejadian A dalam n kali percobaan dirumuskan sebagai berikut.

$$F(H) = n \cdot p(A)$$

b. Macam–macam Kejadian

1. Peluang gabungan dua kejadian yang saling lepas.

Kejadian A dan kejadian B yang saling lepas atau kejadian dimana

$$A \cap B = 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

2. Peluang gabungan dua Kejadian saling beririsan.

Kejadian A dan kejadian B saling beririsan atau kejadian dimana

$$A \cap B \neq 0$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

3. Peluang dua kejadian saling bebas

Kejadian A dan B disebut dua kejadian yang saling bebas, jika terjadi atau tidak terjadinya A tidak mempengaruhi terjadi atau tidak terjadinya B.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$$

4. Peluang dua kejadian bersyarat (tak bebas)

Dua buah kejadian dikatakan tidak bebas, jika terjadinya salah satu dari kejadian itu ataupun tidak terjadinya akan mempengaruhi kejadian lain.

$P(B/A)$ = peluang terjadinya B setelah terjadinya A.

$P(A/B)$ = peluang terjadinya A setelah terjadinya B.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B / A)$$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

23. Dua dadu dilambungkan bersama-sama. Peluang muncul mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua 5 adalah

- A. $\frac{6}{36}$ D. $\frac{3}{36}$
B. $\frac{5}{36}$ E. $\frac{1}{36}$
C. $\frac{4}{36}$

Jawaban: E

⇔ $n(K) =$ mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua 5 $\rightarrow (3, 5)$

$n(S) =$ banyaknya permukaan dadu = 36

⇔ Peluang muncul mata dadu pertama 3 dan mata dadu kedua 5

$$\text{adalah} = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{1}{36}$$

24. Dari seperangkat kartu bridge diambil secara acak satu lembar kartu. Peluang terambilnya kartu bukan As adalah

- A. $\frac{1}{52}$ D. $\frac{3}{13}$
B. $\frac{1}{13}$ E. $\frac{12}{13}$
C. $\frac{5}{52}$

Jawaban: D

⇔ Banyaknya kartu bridge = 52 buah

$$p_A = \text{peluang terambilnya kartu As (4 kartu As)} = \frac{4}{52}$$

⇔ Peluang terambilnya kartu bukan As = $1 - p(A)$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{4}{52} \\ &= \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \end{aligned}$$

25. Enam anak, 3 laki-laki dan 3 perempuan, duduk berjajar. Peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah

- A. $\frac{1}{60}$ D. $\frac{1}{10}$
 B. $\frac{1}{30}$ E. $\frac{1}{5}$
 C. $\frac{1}{15}$

Jawaban: E

⇔ Misal: P (perempuan) dan L (laki-laki)



- Banyak formasi 3 perempuan **duduk berdampingan** adalah $n(K) = 4! \cdot 3!$
- Ruang sampelnya adalah $n(S) = 6!$

⇔ Peluang 3 perempuan duduk berdampingan adalah:

$$= \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{4! \cdot 3!}{6!} = \frac{(4)(3)(2)(1)}{(6)(5)(4)} = \frac{1}{5}$$

26. Tersedia 15 kunci berbeda dan hanya terdapat 1 kunci yang dapat digunakan untuk membuka sebuah pintu. Kunci diambil satu per satu tanpa pengembalian. Peluang kunci yang terambil dapat digunakan untuk membuka pintu pada pengambilan ketiga adalah

- A. $\frac{1}{15}$ D. $\left(\frac{14}{15}\right)^2 \cdot \frac{1}{15}$
 B. $\left(\frac{1}{15}\right)\left(\frac{1}{14}\right)\left(\frac{1}{13}\right)$ E. $\frac{13}{15}$
 C. $\left(\frac{1}{15}\right)^3$

Jawaban: A

⇔ Peluang kunci yang terambil dapat digunakan untuk membuka pintu pada pengambilan ke tiga

$$= \underbrace{\left(\frac{14}{15}\right)}_I \underbrace{\left(\frac{13}{14}\right)}_{II} \underbrace{\left(\frac{1}{13}\right)}_{III} = \frac{1}{15}$$

27. Sebuah kartu diambil secara acak dari satu set lengkap kartu bridge. Peluang bahwa yang terampil adalah kartu merah atau kartu As adalah

A. $\frac{24}{52}$

D. $\frac{30}{52}$

B. $\frac{26}{52}$

E. $\frac{32}{52}$

C. $\frac{28}{52}$

Jawaban: C

⇔ $S =$ Banyaknya kartu bridge $= 52$

$$pA. = \text{peluang terambil 1 kartu merah} = \frac{26}{52}$$

$$pB. = \text{peluang terambilnya kartu As} = \frac{4}{52}$$

$$p(A \cap B) = \text{Irisan } pA. \text{ dan } pB.$$

$$= 2 \text{ kartu As merah} = \frac{2}{52}$$

$$\Leftrightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$= \frac{26}{52} + \frac{4}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52}$$

28. Suatu kelas terdiri atas 10 pelajar pria dan 20 pelajar wanita. Separuh pelajar pria dan separuh pelajar wanita memakai arloji. Jika dipilih satu pelajar, maka peluang yang terpilih pria atau memakai arloji adalah

A. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{3}$

E. $\frac{5}{6}$

C. $\frac{3}{4}$

Jawaban: D

$$\Leftrightarrow n(S) = 30$$

$$nA. = \text{pelajar pria} = 10$$

$$nB. = \text{pelajar yang memakai arloji (5 pria dan 10 wanita)} = 15$$

$$n(A \cap B) = 5 \text{ pelajar}$$

$$\Leftrightarrow p(A \cup B) = pA. + pB. - p(A \cap B)$$

$$= \frac{10}{30} + \frac{15}{30} - \frac{5}{30}$$

$$= \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

29. Diberikan suku banyak $p(x) = x^2 + bx + c$. Jika b dan c dipilih secara acak dari selang $[0, 4]$, maka peluang suku banyak tersebut tidak mempunyai akar adalah

A. 0

D. $\frac{5}{6}$

B. $\frac{1}{3}$

E. 1

C. $\frac{2}{3}$

Jawaban: C

$$\Leftrightarrow p(x) = x^2 + bx + c$$

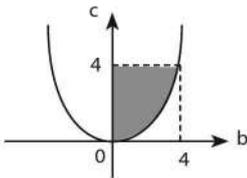
Syarat tidak mempunyai akar:

$$D < 0 \rightarrow b^2 - 3c < 0$$

$$b^2 < 3c$$

$$c > \frac{1}{3}b^2$$

Untuk b dan c dalam selang $[0, 4]$, maka $c > \frac{1}{3}b^2$ berupa daerah yang diarsir di bawah ini.



$$\Leftrightarrow n(K) = \text{luas daerah yang diarsir} = \frac{2}{3}(4)(4) = \frac{2}{3}(16)$$

$$n(S) = \text{luas persegi dengan sisi } 4 = 16$$

⇔ Jadi, peluang suku banyak tersebut tidak mempunyai akar

$$\text{adalah } = p(K) = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{\frac{2}{3}(16)}{(16)} = \frac{2}{3}$$

30. Jika LA. adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan parabola $y = 2ax - x^2$, $0 < a < 1$, maka peluang nilai a sehingga $L(a) \geq \frac{9}{16}$ adalah

A. $\frac{3}{4}$

D. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

E. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{3}{8}$

Jawaban: E

⇔ $y = 2ax - x^2 = x(2a - x)$

Kurva $y = 2ax - x^2$ memotong sumbu x di titik $(0, 0)$ dan $(2a, 0)$, maka luas daerah yang dibatasi kurva dan sumbu x adalah:

$$\begin{aligned} \text{LA.} &= \int_0^{2a} (2ax - x^2) dx \\ &= \left(ax^2 - \frac{1}{3}x^3 \right)_0^{2a} \\ &= \left(4a^3 - \frac{8}{3}a^3 \right) \\ &= \frac{4}{3}a^3 \end{aligned}$$

⇔ $L(a) \geq \frac{9}{16} \rightarrow \frac{4}{3}a^3 \geq \frac{9}{16}$

$$(a)^3 \geq \left(\frac{3}{4} \right)^3$$

$$a \geq \frac{3}{4} \rightarrow n(K) = \frac{1}{4}$$

$$0 < a < 1 \rightarrow n(S) = 1$$

$$\text{Peluang nilai a sehingga } L(a) \geq \frac{9}{16} \text{ adalah } = \frac{n(K)}{n(S)} = \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4}$$

LATIHAN SOAL 23

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

SOAL LATIHAN - 1

1. Sebuah pesawat terbang dapat memilih jalur penerbangan dari Bali ke Jakarta melalui 3 jalur dari Jakarta ke Medan 4 jalur. Maka banyak jalur yang bisa dipilih dari Bali ke Medan melalui Jakarta sebanyak ... jalur.
A. 7
B. 10
C. 12
D. 14
E. 144
2. Ahmad mempunyai 5 pasang sepatu dan 6 pasang kaus kaki yang biasa digunakan saat pergi ke sekolah. Pasangan sepatu dan kaus kaki yang bisa dipakai Ahmad saat pergi ke sekolah ada ... pasang.
A. 11 pasang
B. 15 pasang
C. 25 pasang
D. 30 pasang
E. 36 pasang
3. Dari 5 orang calon pengurus akan dipilih seorang ketua, seorang wakil ketua, dan seorang bendahara. Banyaknya susunan pengurus yang mungkin adalah
A. 10
B. 15
C. 20
D. 60
E. 125

SOAL LATIHAN - 2

4. Tiga siswa dan tiga siswi duduk berjajar pada sebuah bangku. Jika yang menempati pinggir bangku harus siswa, maka banyaknya susunan posisi duduk yang mungkin adalah
 - A. 6
 - B. 24
 - C. 120
 - D. 144
 - E. 720

5. Dari angka-angka 2, 3, 4, 5, 6, dan 8 akan dibentuk bilangan terdiri dari tiga angka berlainan. Banyak bilangan antara 300 dan 700 yang dapat dibentuk dari angkaangka tersebut adalah
 - A. 144
 - B. 120
 - C. 100
 - D. 80
 - E. 24

6. Terdapat 2 siswa laki-laki dan 5 siswa perempuan duduk berdampingan pada kursi berjajar. Jika siswa laki-laki duduk di ujung, banyak cara mereka duduk berdampingan adalah
 - A. 240
 - B. 120
 - C. 42
 - D. 21
 - E. 10

7. Banyak bilangan ratusan dengan angka pertama dan kedua mempunyai selisih 2 atau 3 adalah
 - A. 300
 - B. 280
 - C. 260
 - D. 252
 - E. 150

8. Enam orang siswa terdiri dari 3 prang pria dan 3 orang wanita akan duduk berdampingan. Banyaknya cara mereka dapat duduk berdampingan secara selang seling adalah
 - A. 154
 - B. 72
 - C. 36
 - D. 24
 - E. 12

14. Tujuh orang anak akan duduk pada tiga kursi A, B, dan C secara berdampingan. Banyak kemungkinan mereka duduk adalah
- A. 35
B. 60
C. 120
D. 180
E. 210
15. Dari angka 2, 4, 6, 8, dan 9 dibuat bilangan yang terdiri dari 3 angka berbeda. Banyaknya bilangan yang kurang dari 500 adalah
- A. 32
B. 24
C. 16
D. 12
E. 8
16. Bilangan terdiri dari tiga angka disusun dari angka-angka 2, 3, 5, 6, 7, dan 9. Banyaknya bilangan dengan angka-angka yang berlainan dan yang lebih kecil dari 400 adalah
- A. 20
B. 35
C. 40
D. 80
E. 120
17. Banyaknya bilangan bulat positif yang kurang dari 300.000 yang mengandung angka 4, 5, dan 6 secara bersama-sama dan berurutan di dalam bilangan tersebut adalah
- A. 800
B. 900
C. 921
D. 1200
E. 3000
18. Pada suatu tiang diikatkan bendera, 4 buah merah, 2 biru dan 2 hijau. Setiap susunan mempunyai arti yang berbeda. Banyaknya susunan bendera yang mungkin adalah
- A. 70
B. 96
C. 240
D. 280
E. 420
19. Kakek, nenek, seorang cucu, dan 4 orang anak-anaknya duduk pada 7 kursi pada sebuah meja bundar untuk mengadakan jamuan makan malam. Jika cucu harus duduk di antara kakek dan neneknya, maka banyak cara duduk ketujuh orang tersebut adalah

- A. 24
B. 48
C. 96
- D. 120
E. 720
20. Banyak permutasi dari huruf-huruf pada kata **"jujur"** adalah
- A. 120
B. 60
C. 30
- D. 20
E. 5
21. Banyak bilangan ratusan dengan angka pertama dan terakhir mempunyai selisih 3 dan ada angka yang sama adalah
- A. 32
B. 30
C. 26
- D. 16
E. 15
22. Kode kupon hadiah untuk belanja pada suatu toko swalayan berbentuk bilangan yang disusun dari angka 2, 4, 4, 6, dan 8. Jika kupon-kupon tersebut disusun berdasarkan kodenya mulai dari yang terkecil sampai dengan yang terbesar, maka kupon dengan kode lebih besar 64.000 sebanyak
- A. 39
B. 21
C. 20
- D. 19
E. 11
23. Banyaknya cara memilih 3 orang utusan dari 10 orang calon untuk mengikuti suatu konferensi adalah
- A. 120
B. 180
C. 240
- D. 360
E. 720
24. Seorang murid diminta mengerjakan 5 dari 7 soal ulangan, tapi soal nomor 1 dan 2 harus dikerjakan. Banyak pilihan yang dapat diambil murid tersebut adalah
- A. 4
B. 5
C. 6
- D. 7
E. 10

25. Diketahui himpunan $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ banyaknya himpunan dari H yang terdiri atas 3 elemen adalah
- | | |
|-------|-------|
| A. 6 | D. 20 |
| B. 10 | E. 25 |
| C. 15 | |
26. Dari sekelompok remaja terdiri atas 10 pria dan 7 wanita dipilih 2 pria dan 3 wanita, maka banyaknya cara pemilihan adalah
- | | |
|---------|---------|
| A. 1557 | D. 5175 |
| B. 1575 | E. 5715 |
| C. 1595 | |
27. Pengambilan 4 buah buku tulis dan 5 buah pensil yang terpilih dari 8 buah buku tulis dan 8 buah pensil. Banyaknya cara pemilihan yang dapat dilakukan adalah
- | | |
|---------|---------|
| A. 336 | D. 2880 |
| B. 1680 | E. 3920 |
| C. 2016 | |
28. Banyaknya segitiga yang dapat dibuat dari 7 titik tanpa ada tiga titik yang terletak segaris adalah
- | | |
|-------|--------|
| A. 30 | D. 70 |
| B. 35 | E. 210 |
| C. 42 | |
29. Di suatu perkumpulan akan dipilih perwakilan yang terdiri dari 6 orang. Calon yang tersedia dari 5 pria dan 4 wanita. Banyaknya susunan perwakilan yang dapat dibentuk jika sekurang-kurangnya terpilih 3 pria adalah
- | | |
|-------|-------|
| A. 84 | D. 74 |
| B. 82 | E. 66 |
| C. 76 | |
30. Dari sebuah kantong yang berisi 4 manik biru, 5 manik merah, dan 3 manik putih akan diambil 5 manik sekaligus. Cara pengambilan agar yang terambil 2 manik biru, 2 manik merah, dan 1 manik putih adalah

- A. 24
- B. 64
- C. 100
- D. 120
- E. 180

31. Tono beserta 9 orang temannya bermaksud membentuk suatu tim bolavoli terdiri atas 6 orang. Apabila Tono harus menjadi anggota tim tersebut, maka banyak tim yang mungkin dibentuk adalah

- A. 126
- B. 162
- C. 210
- D. 216
- E. 252

32. Himpunan A memenuhi hubungan $\{1, 7\} \subset A \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Jika 2 adalah anggota A, maka banyak himpunan A yang mungkin adalah

- A. 4
- B. 8
- C. 16
- D. 24
- E. 32

33. Dari 10 orang siswa yang terdiri 7 orang putra dan 3 orang putri akan dibentuk tim yang beranggotakan 5 orang. Jika disyaratkan anggota tim tersebut paling banyak 2 orang putri, maka banyaknya tim yang dapat dibentuk adalah

- A. 168
- B. 189
- C. 210
- D. 231
- E. 252

34. Sepuluh orang akan bepergian dengan 2 mobil yang masing-masing berkapasitas 6 orang dan 7 orang. Jika setiap mobil harus berisi sekurang-kurangnya 2 orang, maka banyak kemungkinan mereka terdistribusi dalam 2 mobil tersebut adalah

- A. 792
- B. 972
- C. 1458
- D. 1548
- E. 1584

SOAL LATIHAN - 3

35. Seorang anak melempar tiga mata uang sekaligus sebanyak satu kali. Bila A merupakan kejadian munculnya angka paling sedikit satu kali, maka pA . =

A. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{6}{8}$

B. $\frac{4}{8}$

E. $\frac{7}{8}$

C. $\frac{5}{8}$

36. Dalam sebuah ruangan pertemuan terdapat enam pasang suami-istri. Jika dipilih dua orang secara acak dari ruangan tersebut, maka peluang terpilihnya dua orang tersebut suami-istri adalah

A. $\frac{1}{11}$

D. $\frac{5}{11}$

B. $\frac{2}{11}$

E. $\frac{6}{11}$

C. $\frac{3}{11}$

37. Pada sebuah gudang tersimpan 80 barang dan 20 diantaranya rusak. Jika diambil satu barang secara acak, maka peluang barang yang terambil dalam kondisi tidak rusak adalah

A. $\frac{1}{20}$

D. $\frac{1}{8}$

B. $\frac{1}{10}$

E. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{1}{8}$

38. Sebuah kotak berisi 4 bola hijau dan 6 bola merah. Secara acak diambil 2 bola dari kotak. Peluang kedua bola yang terambil berwarna hijau adalah

42. Dalam sebuah kotak terdapat 4 bola merah dan 6 bola putih. Dari kotak itu diambil 2 bola sekaligus secara acak. Peluang terambil sekurang-kurangnya 1 bola putih adalah

A. $\frac{6}{45}$

D. $\frac{30}{45}$

B. $\frac{15}{45}$

E. $\frac{39}{45}$

C. $\frac{24}{45}$

43. Di dalam sebuah kotak ada 9 tiket yang diberi nomor 1 sampai 9. Jika dua tiket diambil secara acak, probabilitas bahwa satu ganjil dan satu genap adalah

A. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{7}{18}$

B. $\frac{1}{6}$

E. $\frac{5}{9}$

C. $\frac{5}{18}$

44. Jika dua angka dipilih secara acak dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9, maka peluang kedua-duanya angka genap adalah ... (tidak boleh ada angka yang berulang)

A. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{6}$

B. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{4}{9}$

45. Pada pelemparan dua dadu bersama-sama satu kali, maka peluang muncul jumlah angka ke dua dadu sama dengan 3 atau 10 adalah

A. $\frac{2}{36}$

D. $\frac{6}{36}$

B. $\frac{3}{36}$

E. $\frac{7}{36}$

C. $\frac{5}{36}$

46. Masing-masing kotak A dan B berisi 10 buah lampu pijar. Setelah diperiksa, ternyata pada kotak A terdapat 3 lampu rusak dan pada kotak B terdapat 1 lampu rusak. Dari masing-masing kotak diambil 1 lampu secara acak. Peluang yang terambil tepat satu lampu rusak adalah

A. $\frac{3}{100}$

D. $\frac{17}{50}$

B. $\frac{2}{50}$

E. $\frac{33}{50}$

C. $\frac{16}{50}$

47. Diberikan suku banyak $p(x) = ax^2 + bx + 1$. Jika a dan b dipilih secara acak dari selang $[0, 3]$, maka peluang suku banyak tersebut tidak mempunyai akar adalah

A. 1

D. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

E. 0

C. $\frac{2}{4}$

48. Diketahui segilima ABCDE, dengan $A(0, 2)$, $B(4, 0)$, $C(2\pi + 1, 0)$, $D(2\pi + 1, 4)$ dan $E(0, 4)$. Titik P dipilih secara acak dari titik di dalam segilima tersebut. Peluang sudut APB berukuran tumpul adalah

A. $\frac{3}{8}$

D. $\frac{5}{16}$

B. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{5}{8}$

C. $\frac{1}{2}$

49. Dua buah dadu dilempar secara bersamaan. x adalah angka yang keluar dari dadu pertama, y adalah angka yang keluar dari dadu kedua. Jika $A = \{x, y \mid x + y < 2y < y + 2x\}$, di mana sisa hasil bagi $(x + y)$ oleh 2 adalah 0, maka $PA. = \dots$

A. $\frac{1}{36}$

D. $\frac{1}{12}$

B. $\frac{1}{24}$

E. $\frac{1}{8}$

C. $\frac{1}{18}$

50. Jika $LA.$ adalah luas daerah yang dibatasi oleh sumbu x dan parabola $y = ax + x^2$, $0 < a < 1$. Peluang nilai a sehingga $L(a) \geq \frac{1}{48}$ adalah

A. $\frac{11}{12}$

D. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{7}{8}$

E. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{5}{6}$



LOGIKA MATEMATIKA

24

A. SIMBOL DAN TABEL KEBENARAN

a. Simbol dan Artinya

Nama	Simbol	Cara baca
Konjungsi	\wedge	$p \wedge q$ dibaca "p dan q"
Disjungsi	\vee	$p \vee q$ dibaca "p atau q"
Implikasi	\Rightarrow	$p \Rightarrow q$ dibaca "jika p maka q"
Biimplikasi	\Leftrightarrow	$p \Leftrightarrow q$ dibaca "p jika dan hanya jika q"
Negasi	\sim	$\sim p$ dibaca "tidak benar bahwa p"

b. Tabel Kebenaran

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$
B	B	B	B	B	B	S	S
B	S	S	B	S	S	S	B
S	B	S	B	B	S	B	S
S	S	S	S	B	B	B	B

Cara menghafal tabel kebenaran:

- $(p \wedge q) \rightarrow$ **benar** jika keduanya benar
- $(p \vee q) \rightarrow$ **salah** jika keduanya salah
- $(p \Rightarrow q) \rightarrow$ **salah** jika p benar dan q salah
- $(p \Leftrightarrow q) \rightarrow$ **benar** jika p dan q benar **atau** p dan q salah

c. Tautologi dan Kontradiksi

1. **Tautologi** adalah pernyataan majemuk yang **selalu benar** untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.
2. **Kontradiksi** adalah pernyataan majemuk yang **selalu salah** untuk semua kemungkinan nilai kebenaran dari pernyataan-pernyataan komponennya.

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 1

1. Nilai kebenaran pernyataan majemuk $(\sim p \Rightarrow q) \vee \sim q$ pada tabel berikut adalah

p	q	$(\sim p \Rightarrow q) \vee \sim q$
B	B	...
B	S	...
S	B	...
S	S	...

- A. SBSB
- B. BBBS
- C. BSBB
- D. BBBB
- E. BBSS

Jawaban: D

⇔ (1) (3) (2) (5) (4)

$\sim p$	\Rightarrow	q	\vee	$\sim q$
S	B	B	B	S
S	B	S	B	B
B	B	B	B	S
B	S	S	B	B

↑ ↑ ↑

⇔ (1), (2), (3), ... adalah urutan pengisian tabel kebenaran.

⇔ Jadi, nilai kebenarannya adalah BBBB

2. Diketahui pernyataan–pernyataan p , q dan r . Pernyataan $(p \Rightarrow q) \vee r$ bernilai salah jika
- A. p benar, q benar, dan r benar
 - B. p benar, q benar, dan r salah
 - C. p benar, q salah, dan r salah
 - D. p salah, q salah, dan r benar
 - E. p salah, q salah, dan r salah

Jawaban: C

⇔ $(p \Rightarrow q) \vee r$
 $(B \Rightarrow B) \vee B = \text{benar}$
 $(B \Rightarrow B) \vee S = \text{benar}$
 $(B \Rightarrow S) \vee S = \text{salah}$
 $(S \Rightarrow S) \vee B = \text{benar}$
 $(S \Rightarrow S) \vee S = \text{benar}$

3. Pernyataan yang mempunyai nilai kebenaran sama dengan pernyataan: "Jika 113 habis dibagi 3, maka 113 bilangan genap" adalah
- A. "113 bilangan ganjil dan 2×113 bilangan ganjil"
 - B. "Jika 113 bilangan ganjil, maka 113 habis dibagi 3"
 - C. "Jika 113 tidak habis dibagi 2, maka 113 bilangan genap"
 - D. "Jika 113 tidak habis dibagi 3, maka 113 bilangan genap"
 - E. "Tidak benar bahwa jika 113 tidak habis dibagi 3, maka 2×113 bilangan ganjil"

Jawaban: D

$\Leftrightarrow p = B B S S$

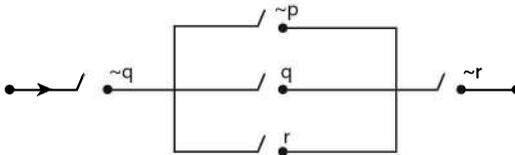
$q = B S B S$

Tautologi = pernyataan yang **selalu benar**

p	\vee	$\sim q$	\Rightarrow	p
B	B	S	B	B
B	B	B	B	B
S	S	S	B	S
S	S	B	B	S

↑ ↑ ↑

6.



Pernyataan yang menggambarkan rangkaian listrik berikut adalah

....

A. $\sim q \vee (\sim p \wedge q \wedge r) \vee \sim r$

D. $\sim q \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge \sim r$

B. $\sim q \vee (\sim p \wedge q) \wedge (r \vee \sim r)$

E. $(\sim q \wedge \sim p) \vee (q \vee r) \wedge \sim r$

C. $\sim q \wedge \sim p \vee q \vee r \wedge \sim r$

Jawaban: D

Catatan:

\wedge = rangkaian listrik yang disusun **seri**

\vee = rangkaian listrik yang disusun **paralel**

\Leftrightarrow Pernyataan yang memenuhi gambar rangkaian listrik di atas adalah $\sim q \wedge (\sim p \vee q \vee r) \wedge \sim r$

7. Ingkaran yang benar dari pernyataan majemuk "saya lulus UM dan saya gembira" adalah

A. Tidak benar bahwa "saya lulus UM dan saya gembira"

B. Saya tidak lulus UM dan saya gembira

C. Saya lulus UM dan saya tidak gembira

D. Saya tidak lulus UM atau saya gembira

E. Jawaban semua salah

Jawaban: A

⇔ $p =$ saya lulus UM

$q =$ saya gembira

⇔ $\sim(p \wedge q) \equiv$ tidak benar bahwa "saya lulus UM dan saya gembira"

⇔ Jadi, yang sesuai adalah pernyataan A.

B. KONVERS, INVERS, DAN KONTRAPOSISI

Dari Implikasi $p \Rightarrow q$,

Konvers	Invers	Kontraposisi
$q \Rightarrow p$	$\sim p \Rightarrow \sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$

C. PERNYATAAN KUANTOR DAN BENTUK EKUIVALEN

a. Pernyataan Kuantor

1. Kuantor umum (Universal)

- simbol kuantor universal: \forall
- dibaca "untuk setiap/tidak ada/semua"

2. Kuantor khusus (Eksistensial)

- simbol kuantor eksistensial: \exists
- dibaca "sebagian/ada/beberapa"

b. Negasi Pernyataan Kuantor

- $\sim[\forall(x) P(x)] \equiv \exists(x), [\sim P(x)]$
- $\sim[\exists(x) P(x)] \equiv \forall(x), [\sim P(x)]$

c. Bentuk Ekuivalen

- $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
- $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \Leftrightarrow q$

11. Konvers dari pernyataan "Jika devisa negara naik, maka pembangunan berjalan baik" adalah
- A. Jika pembangunan tidak berjalan baik, maka devisa negara naik.
 - B. Jika pembangunan tidak berjalan baik, maka devisa negara tidak naik.
 - C. Jika pembangunan berjalan baik, maka devisa negara naik.
 - D. Jika devisa negara tidak naik, maka pembangunan tidak berjalan baik.
 - E. Jika devisa negara tidak naik, maka pembangunan berjalan baik.

Jawaban: C

- ⇔ Konvers dari $p \Rightarrow q \equiv q \Rightarrow p$
- ⇔ Jadi, yang sesuai adalah pernyataan C.

12. Invers dari pernyataan: "Jika Badu menjadi presiden maka ia tinggal di istana negara" adalah
- A. Jika Badu tinggal di istana negara maka ia menjadi presiden.
 - B. Jika Badu tidak jadi presiden maka ia tidak tinggal di istana negara.
 - C. Jika badu jadi presiden maka ia tinggal di istana negara.
 - D. Jika Badu tidak tinggal di istana negara maka ia tidak jadi presiden.
 - E. Badu akan tinggal di istana ketika ia menjadi presiden.

Jawaban: B

- ⇔ Invers dari $p \Rightarrow q \equiv \sim p \Rightarrow \sim q$
- ⇔ Jadi, yang sesuai adalah pernyataan B.

13. Kontraposisi dari pernyataan "Bila mahasiswa pandai, maka lulus ujian akhir" adalah
- A. Bila mahasiswa ujian akhir, maka mahasiswa pandai.
 - B. Bila mahasiswa tidak pandai, maka tidak lulus ujian akhir.
 - C. Bila mahasiswa tidak lulus ujian akhir, maka mahasiswa tidak pandai.

- D. Bila mahasiswa pandai, maka mahasiswa tidak lulus ujian akhir.
- E. Bila mahasiswa tidak pandai, maka mahasiswa lulus ujian akhir.

Jawaban: C

- ⇔ Kontraposisi dari $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
- ⇔ Jadi, yang sesuai adalah pernyataan C.

14. Negasi dari "Semua siswa tidak membuat tugas kokurikuler" adalah

....

- A. Semua siswa tidak membuat tugas kokurikuler.
- B. Ada siswa yang tidak membuat tugas kokurikuler.
- C. Beberapa siswa membuat tugas kokurikuler.
- D. Beberapa siswa tidak membuat tugas kokurikuler.
- E. Tidak ada siswa yang membuat tugas kokurikuler.

Jawaban: C

- ⇔ $P(x) = \text{"Semua siswa tidak membuat tugas kokurikuler"}$
- ⇔ $\sim[\forall(x), P(x)] \equiv \exists(x), [\sim P(x)]$
 $\equiv \text{Beberapa siswa membuat tugas kokurikuler}$

15. Manakah negasi dari "Untuk semua harga x real dengan $0 < a < 1$, maka $a^x > 0$ "?

- A. Ada beberapa harga x real dengan $0 < x < 1$, berlaku $a^x > 0$.
- B. Ada beberapa harga x real dengan $0 < x < 1$, berlaku $a^x \neq 0$.
- C. Ada beberapa harga x real dengan $0 < x < 1$, berlaku $a^x < 0$.
- D. Ada beberapa harga x real dengan $0 < x < 1$, berlaku $a^x = 0$.
- E. Ada beberapa harga x real dengan $a < 0$ atau $a > 1$, berlaku $a^x < 0$.

Jawaban: C

- ⇔ $p = \text{semua harga } x \text{ real dengan } 0 < a < 1$
 $q = a^x > 0 \rightarrow \sim q = a^x < 0$
- ⇔ Negasi dari $p \Rightarrow q \equiv p \wedge \sim q$
- ⇔ Pernyataan yang sesuai adalah C.

16. Implikasi "Jika suatu bangsa menguasai IPTEK, maka bangsa itu mempunyai pengaruh besar di Dunia", ekuivalen dengan
- Jika suatu bangsa tidak mempunyai pengaruh besar di dunia, maka bangsa itu tidak menguasai IPTEK.
 - Jika suatu bangsa mempunyai pengaruh besar di dunia, maka bangsa itu menguasai IPTEK.
 - Suatu bangsa menguasai IPTEK tetapi tidak mempunyai pengaruh besar di dunia.
 - Suatu bangsa tidak menguasai IPTEK dan mempunyai pengaruh besar di dunia.
 - Suatu bangsa tidak menguasai IPTEK tetapi mempunyai pengaruh besar di dunia.

Jawaban: A

- $\Leftrightarrow p = \text{suatu bangsa menguasai IPTEK}$
 $\sim p = \text{suatu bangsa tidak menguasai IPTEK}$
 $q = \text{bangsa itu mempunyai pengaruh besar di dunia}$
 $\sim q = \text{bangsa itu tidak mempunyai pengaruh besar di dunia}$
 $\Leftrightarrow \text{Implikasi } p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

17. Pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow r$, ekuivalen dengan

- | | |
|---|---|
| A. $\sim p \vee \sim q \vee r$ | D. $(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim r$ |
| B. $(\sim p \vee \sim q) \wedge \sim r$ | E. $(p \wedge q) \vee \sim r$ |
| C. $(\sim p \wedge \sim q) \vee r$ | |

Jawaban: A

- $\Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r$
 $\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$

18. Negasi dari pernyataan "Jika garis k tegak lurus bidang α , maka semua garis di bidang α tegak lurus garis k" adalah
- Jika garis k tidak tegak lurus bidang α , maka semua garis di bidang α tidak tegak lurus garis k.
 - Jika garis k tegak lurus bidang α , maka semua garis di bidang α tegak lurus garis k.

- C. Garis k tegak lurus bidang α tetapi ada garis di bidang α yang tidak tegak lurus garis k.
- D. Garis k tegak lurus bidang α tetapi semua garis di bidang α tidak tegak lurus garis k.
- E. Garis k tidak tegak lurus bidang α , maka semua garis di bidang α tegak lurus garis k.

Jawaban: C

- $\Leftrightarrow p = \text{garis k tegak lurus bidang } \alpha$
 $q = \text{semua garis di bidang } \alpha \text{ tegak lurus garis k.}$
- $\Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$
 $\equiv p \wedge \sim q$
- $\Leftrightarrow p \wedge \sim q \equiv \text{Garis k tegak lurus bidang } \alpha$
tetapi ada garis di bidang α yang tidak tegak lurus garis k.

19. Suatu pernyataan "Jika saya rajin belajar, maka saya lulus ujian". Pernyataan yang ekuivalen dengan implikasi di atas adalah
- A. Jika saya tidak rajin belajar, maka saya tidak lulus ujian.
 - B. Jika saya tidak lulus ujian, maka saya tidak rajin belajar.
 - C. Jika saya tidak rajin belajar, maka saya tidak rajin belajar.
 - D. Jika saya lulus ujian, maka rajin belajar.
 - E. Jika saya tidak lulus ujian, maka saya rajin belajar.

Jawaban: B

- $\Leftrightarrow p = \text{saya rajin belajar}$
 $q = \text{saya lulus ujian}$
- $\Leftrightarrow (p \Rightarrow q) \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$
 $\equiv \text{Jika saya tidak lulus ujian, maka saya tidak rajin belajar.}$

20. Negasi dari "Jika perang terjadi, maka semua orang gelisah" adalah
- A. perang terjadi dan semua orang tidak gelisah
 - B. perang terjadi dan ada orang gelisah
 - C. perang terjadi tetapi semua orang gelisah
 - D. perang terjadi dan tidak ada orang gelisah
 - E. perang terjadi tetapi ada orang yang tidak gelisah

Jawaban: E

$\Leftrightarrow p = \text{perang terjadi}$

$q = \text{semua orang gelisah}$

$\Leftrightarrow \sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q)$

$\equiv p \wedge \sim q$

$\equiv \text{perang terjadi tetapi ada orang yang tidak gelisah.}$

D. PENARIKAN KESIMPULAN

a. Modus Ponens

Premis (1) : $p \Rightarrow q$

Premis (2) : p

Kesimpulan : q

Jika ditulis dalam bentuk implikasi: $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$

b. Modus Tollens

Premis (1) : $p \Rightarrow q$

Premis (2) : $\sim q$

Kesimpulan : $\sim p$

Jika ditulis dalam bentuk implikasi: $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$

c. Prinsip Silogisme

Premis (1) : $p \Rightarrow q$

Premis (2) : $q \Rightarrow r$

Kesimpulan : $p \Rightarrow r$

Jika ditulis dalam bentuk implikasi: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

CONTOH SOAL & PEMBAHASAN - 3

21. Diberikan premis-premis sebagai berikut.

P_1 : Jika $x^2 \geq 0$, maka 2 merupakan bilangan prima.

P_2 : 2 bukan bilangan prima.

Simpulan dari kedua premis di atas adalah

- | | |
|-----------------|---------------|
| A. $x^2 \geq 0$ | D. $x^2 < 0$ |
| B. $x^2 > 0$ | E. $x \neq 0$ |
| C. $x > 0$ | |

Jawaban: D

$\Leftrightarrow P_1 : p \Rightarrow q$

$P_2 : \quad \sim q$

$\therefore \sim p$

\Leftrightarrow Jadi, simpulan yang benar adalah $x^2 < 0$

22. Kesimpulan dari tiga premis berikut adalah

(1) $p \Rightarrow \sim q$

(2) $\sim r \Rightarrow q$

(3) $\sim r$

- | | |
|-------------|----------------------|
| A. $\sim p$ | D. $p \wedge q$ |
| B. $\sim q$ | E. $r \wedge \sim r$ |
| C. q | |

Jawaban: A

\Leftrightarrow (1) $p \Rightarrow \sim q$ $\equiv p \Rightarrow \sim q$

(2) $\sim r \Rightarrow q$ $\equiv \sim q \Rightarrow r$

\therefore $p \Rightarrow r$

(3) $\sim r$

$\therefore \sim p$

23. Jika kita sungguh-sungguh belajar Matematika atau setidaknya membaca catatan pelajaran Matematika, maka kita akan lulus tes mata pelajaran tersebut. Kita sungguh-sungguh belajar Matematika dan sering pula membaca pelajaran Fisika. Jadi kesimpulannya
- Kita lulus tes mata pelajaran Matematika.
 - Kita lulus pelajaran Fisika.
 - Kita lulus tes pelajaran Matematika dan Fisika.
 - Kita lulus tes pelajaran Matematika atau Fisika.
 - Kita tidak lulus tes pelajaran Fisika.

Jawaban: A

⇔ p = Kita sungguh-sungguh belajar Matematika

q = Kita akan lulus tes mata pelajaran tersebut

⇔ Pernyataan yang sesuai dengan soal adalah:

premis (1) : $p \Rightarrow q$

premis (2) : p

Kesimpulan : q

⇔ Jawaban yang paling tepat adalah: "Kita lulus tes mata pelajaran Matematika"

24. Diketahui premis-premis berikut.

Premis 1: Jika Dodi rajin belajar, maka ia naik kelas

Premis 2: Jika Dodi naik kelas, maka ia akan dibelikan baju

Kesimpulan yang sah adalah

- Dodi tidak rajin belajar tetapi ia akan dibelikan baju.
- Dodi rajin belajar tetapi ia tidak akan dibelikan baju.
- Dodi rajin belajar atau ia akan dibelikan baju.
- Dodi tidak rajin belajar atau ia akan dibelikan baju.
- Dodi rajin belajar atau ia tidak akan dibelikan baju.

Jawaban:D

⇔ p = Dodi rajin belajar

q = Dodi naik kelas

r = Dodi akan dibelikan baju

⇔ (1) $p \Rightarrow q$

(2) $q \Rightarrow r$

Kesimpulan $\equiv p \Rightarrow r$

⇔ Kesimpulannya

$p \rightarrow r \equiv \sim p \vee r$

\equiv Dodi tidak rajin belajar atau ia akan dibelikan baju

25. Diketahui pernyataan:

1. Jika hari panas, maka Ani memakai topi.

2. Ani tidak memakai topi atau ia memakai payung.

3. Ani tidak memakai payung.

Kesimpulan yang sah adalah

A. hari panas

B. hari tidak panas

C. Ani memakai topi

D. hari panas dan Ani memakai topi

E. hari tidak panas dan Ani memakai topi

Jawaban: B

⇔ p = hari panas

q = Ani pakai topi

r = Ani memakai payung

⇔ (1) $p \Rightarrow q \quad \equiv p \Rightarrow q$

(2) $\sim q \vee r \quad \equiv q \Rightarrow r$

Kesimpulan $\equiv p \Rightarrow r$

(3) $\sim r$

Kesimpulan $\equiv \sim p$ (Hari tidak panas)

LATIHAN SOAL 24

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat pada soal di bawah ini!

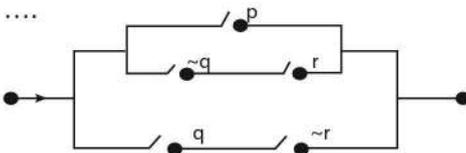
1. Nilai kebenaran yang tepat untuk pernyataan $(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$, pada tabel berikut adalah

p	q	$(p \wedge q) \Rightarrow \sim p$
B	B	
B	S	
S	B	
S	S	

- A. S B S B D. S B B B
 B. S S S B E. B B B B
 C. S S B B
2. Jika p adalah pernyataan yang bernilai benar dan q pernyataan bernilai salah, maka pernyataan di bawah ini yang bernilai benar adalah
- A. $\sim p \vee q$ D. $p \Rightarrow q$
 B. $\sim p \wedge q$ E. $\sim p \Leftrightarrow q$
 C. $\sim q \Rightarrow \sim p$
3. Jika pernyataan $(p \wedge \sim q)$ bernilai benar, maka pernyataan berikut yang bernilai benar adalah
- A. $\sim p \vee q$ D. $p \Rightarrow q$
 B. $\sim p \wedge q$ E. $\sim p \Leftrightarrow q$
 C. $\sim q \Rightarrow \sim p$

4. Jika x adalah peubah pada himpunan bilangan real, nilai x yang memenuhi agar pernyataan "Jika $x^2 - 2x - 3 = 0$, maka $x^2 - x < 5$ " bernilai salah adalah
- A. -1
B. 1
C. 2
D. 3
E. 4
5. Ingkaran dari $(p \wedge q) \Rightarrow r$ adalah
- A. $\sim p \vee \sim q \vee r$
B. $(\sim p \wedge \sim q) \vee r$
C. $p \wedge q \wedge \sim r$
D. $\sim p \wedge \sim q \wedge r$
E. $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$
6. Ingkaran dari pernyataan "Jika $3^2 = 9$, maka $6 + 2 > 7$ " adalah
- A. $3^2 \neq 9$ dan $6 + 2 \leq 7$
B. $3^2 = 9$ dan $6 + 2 \leq 7$
C. Jika $3^2 \neq 9$, maka $6 + 2 \leq 7$
D. Jika $6 + 2 > 7$, maka $3^2 = 9$
E. Jika $6 + 2 \leq 7$, maka $3^2 \neq 9$
7. Negasi dari "Jika AB sejajar CD, maka ABCD persegi panjang" adalah
- A. AB sejajar CD dan ABCD bukan persegi panjang
B. AB sejajar CD atau ABCD bukan persegi panjang
C. AB tidak sejajar CD dan ABCD persegi panjang
D. AB tidak sejajar CD atau ABCD persegi panjang
E. AB tidak sejajar CD dan ABCD bukan persegi panjang.
8. Ingkaran dari " $\sqrt{14} < 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ < \sin 60^\circ$ " adalah
- A. $\sqrt{14} \leq 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ < \sin 60^\circ$
B. $\sqrt{14} < 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ \geq \sin 60^\circ$
C. $\sqrt{14} \geq 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ > \sin 60^\circ$
D. $\sqrt{14} > 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ \geq \sin 60^\circ$
E. $\sqrt{14} > 4$ jika dan hanya jika $\sin 45^\circ > \sin 60^\circ$
9. Ingkaran dari pernyataan: "18 habis dibagi 2 atau 9" adalah
- A. 18 tidak habis dibagi 2 dan tidak habis dibagi 9
B. 18 tidak habis dibagi 2 dan 9
C. 18 tidak habis dibagi 2 dan habis dibagi 9

- D. 2 dan 9 membagi habis 18
 E. 18 tidak habis dibagi 2 atau 9
10. Negasi dari pernyataan "Ada siswa SMA mengikuti kompetisi matematika" adalah
 A. Semua siswa SMA tidak mengikuti kompetisi matematika
 B. Ada siswa SMA tidak mengikuti kompetisi matematika
 C. Semua siswa SMA mengikuti kompetisi matematika
 D. Semua siswa SMA berhak mengikuti kompetisi matematika
 E. Tidak semua siswa SMA mengikuti kompetisi matematika
11. Ingkaran dari pernyataan "Setiap bilangan real mempunyai invers penjumlahan" adalah
 A. Beberapa bilangan real mempunyai invers penjumlahan
 B. Beberapa bilangan tidak real mempunyai invers penjumlahan
 C. Ada bilangan real yang tidak mempunyai invers penjumlahan
 D. Semua bilangan real tidak mempunyai invers penjumlahan
 E. Semua bilangan tidak real mempunyai invers penjumlahan
12. Ingkaran dari pernyataan "Semua peserta UN berpakaian seragam" adalah
 A. Semua yang bukan peserta UN, berpakaian seragam
 B. Semua yang bukan peserta UN, tidak berpakaian seragam
 C. Ada yang bukan peserta UN, tidak berpakaian seragam
 D. Ada peserta UN, berpakaian seragam
 E. Ada peserta UN, tidak berpakaian seragam
13. Pernyataan yang menggambarkan rangkaian listrik berikut adalah



- A. $\{p \wedge (\sim q \vee r)\} \wedge (q \vee \sim r)$
 B. $\{p \wedge \sim q \vee r \wedge q \vee \sim r\}$
 C. $\{p \vee \sim q \wedge r \vee q \wedge \sim r\}$
 D. $\{p \vee (\sim q \wedge r) \vee q \wedge \sim r\}$
 E. $\{p \vee (\sim q \wedge r)\} \vee (q \wedge \sim r)$

14. Invers dari pernyataan $p \rightarrow (\sim p \wedge q)$ adalah
- A. $\sim p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
 - B. $p \Rightarrow (p \wedge \sim q)$
 - C. $\sim p \Rightarrow (\sim p \vee q)$
 - D. $\sim p \Rightarrow (p \vee \sim q)$
 - E. $(p \wedge \sim q) \Rightarrow \sim p$
15. Kontraposisi pernyataan $(p \vee q) \Rightarrow \sim r$ adalah
- A. $r \Rightarrow \sim(p \vee q)$
 - B. $\sim r \Rightarrow \sim(p \vee q)$
 - C. $\sim r \Rightarrow (p \vee q)$
 - D. $\sim(p \vee q) \Rightarrow \sim r$
 - E. $(p \vee q) \Rightarrow r$
16. Invers dari pernyataan: "Jika Badu menjadi presiden maka ia tinggal di istana negara" adalah
- A. Jika Badu tinggal di istana negara maka ia menjadi presiden.
 - B. Jika Badu tidak jadi presiden maka ia tidak tinggal di istana negara.
 - C. Jika badu jadi presiden maka ia tinggal di istana negara.
 - D. Jika Badu tidak tinggal di istana negara maka ia tidak jadi presiden.
 - E. Badu akan tinggal di istana ketika ia menjadi presiden.
17. Konvers dari pernyataan "Jika devisa negara naik, maka pembangunan berjalan baik" adalah
- A. Jika pembangunan tidak berjalan baik, maka devisa negara naik.
 - B. Jika pembangunan tidak berjalan baik, maka devisa negara tidak naik.
 - C. Jika pembangunan berjalan baik, maka devisa negara naik.
 - D. Jika devisa negara tidak naik, maka pembangunan tidak berjalan baik.
 - E. Jika devisa negara tidak naik, maka pembangunan berjalan baik.
18. Kontraposisi dari "Jika semua warga negara membayar pajak maka pembangunan berjalan lancar" adalah
- A. Jika pembangunan tidak berjalan lancar maka ada warga negara yang tidak membayar pajak.
 - B. Jika tidak semua warga negara membayar pajak maka pembangunan tidak berjalan lancar.

- C. Jika semua warga negara membayar pajak maka pembangunan tidak berjalan lancar.
- D. Jika pembangunan berjalan lancar maka tidak semua warga negara membayar pajak.
- E. Jika pembangunan tidak berjalan lancar maka semua warga negara tidak membayar pajak.
19. Suatu pernyataan: "Jika ABCD layang-layang, maka AC tegak lurus BD". Pernyataan yang ekuivalen dengan implikasi di atas adalah
- A. Jika AC tidak tegak lurus BD, maka ABCD bukan layang-layang.
- B. Jika ABCD bukan layang-layang, maka AC tidak tegak lurus BD.
- C. Jika AC tidak tegak lurus BD, maka ABCD layang-layang.
- D. Jika ABCD bukan layang-layang, maka AC tegak lurus BD.
- E. Jika AC tegak lurus BD, maka ABCD bukan layang-layang.
20. Apabila p dan q suatu pernyataan, maka $p \wedge (p \vee q)$ ekuivalen dengan pernyataan
- A. q
- B. p
- C. $\sim q$
- D. $\sim p$
- E. $\sim p \wedge \sim q$
21. Pernyataan $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$ ekuivalen dengan pernyataan
- A. $p \Rightarrow q$
- B. $p \Rightarrow \sim q$
- C. $\sim p \Rightarrow q$
- D. $\sim p \Rightarrow \sim q$
- E. $p \Leftrightarrow q$
22. Pernyataan yang ekuivalen dengan: "Jika Amir rajin belajar maka dia pintar", adalah
- A. Jika Amir malas belajar maka dia bodoh.
- B. Jika Amir rajin belajar maka dia tidak pintar.
- C. Jika Amir tidak rajin belajar maka dia pintar.
- D. Jika Amir tidak pintar maka dia tidak rajin belajar.
- E. Jika Amir pintar maka dia rajin belajar.
23. Pernyataan majemuk: "Jika hari turun hujan, maka sungai meluap" ekuivalen dengan
- A. Hari hujan dan sungai meluap.
- B. Hari tidak hujan dan sungai tidak meluap.

- C. Jika sungai meluap, maka hari hujan.
- D. Jika sungai tidak meluap, maka hari tidak hujan.
- E. Jika hari tidak hujan, maka sungai tidak meluap.

24. Kesimpulan dari tiga premis berikut adalah ...

- (1) $p \Rightarrow \sim q$
- (2) $\sim r \Rightarrow q$
- (3) $\sim r$

- A. $\sim p$
- B. $\sim q$
- C. q
- D. $p \wedge q$
- E. $r \wedge \sim r$

25. Diketahui premis-premis berikut.

P_1 : Jika $x^2 < 4$, maka $-2 < x < 2$

P_2 : $x < -2$ atau $x > 2$

Kesimpulan dari kedua premis tersebut adalah

- A. $x^2 \geq 4$
- B. $x^2 > 4$
- C. $x^2 \neq 4$
- D. $x^2 < 4$
- E. $x^2 = 4$

26. Penarikan kesimpulan dengan menggunakan modus tollens didasarkan atas suatu pernyataan majemuk yang selalu berbentuk tautologi untuk setiap kasus. Pernyataan majemuk yang dimaksud adalah

- A. $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
- B. $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$
- C. $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow (p \wedge q)$
- D. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- E. $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow \sim(q \rightarrow r)$

27. Dari argumentasi berikut.

Jika ibu tidak pergi maka adik senang.

Jika adik senang maka dia tersenyum.

Kesimpulan yang sah adalah

- A. Ibu tidak pergi atau adik tersenyum.
- B. Ibu pergi dan adik tidak tersenyum.
- C. Ibu pergi atau adik tidak tersenyum.

- D. Ibu tidak pergi dan adik tersenyum.
- E. Ibu pergi atau adik tersenyum.

28. Diketahui:

Premis (1) : "Jika lulus UN dan tidak lulus SBMPTN, maka Prisma bekerja di perusahaan.

Premis (2) : "Prisma tidak bekerja di perusahaan swasta.

Kesimpulan yang sah berdasarkan kedua premis adalah

- A. Prisma lulus UN dan lulus SBMPTN.
- B. Prisma tidak lulus UN maupun SBMPTN.
- C. Prisma tidak lulus UN atau lulus SBMPTN.
- D. Prisma lulus UN atau lulus SBMPTN.
- E. Prisma lulus UN tetapi tidak lulus SBMPTN.

29. Ditentukan premis-premis:

- 1. Jika Badu rajin bekerja, maka ia disayang ibu.
- 2. Jika Badu disayang ibu, maka ia disayang nenek.
- 3. Badu tidak disayang nenek.

Kesimpulan yang sah dari ketiga premis di atas adalah

- A. Badu rajin bekerja tetapi tidak disayang ibu.
- B. Badu rajin bekerja.
- C. Badu disayang ibu.
- D. Badu disayang nenek.
- E. Badu tidak rajin bekerja.

30. Diketahui premis-premis berikut.

- 1. Jika Budi rajin belajar, maka ia menjadi pandai.
- 2. Jika Budi menjadi pandai, maka ia lulus ujian.
- 3. Budi tidak lulus ujian.

Kesimpulan yang sah adalah

- A. Budi menjadi pandai.
- B. Budi rajin belajar.
- C. Budi lulus ujian.
- D. Budi tidak pandai.
- E. Budi tidak rajin belajar.

SOAL EVALUASI



SOAL EVALUASI MATEMATIKA

1. Jika $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = a+b\sqrt{6}$ dengan a dan b bilangan bulat, nilai $a+b =$

- A. -5
B. -3
C. -2
D. 2
E. 3

2. Bentuk sederhana dari $\left(\frac{m^{\frac{1}{2}}n^{-3}}{m^{-1}n^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{2}{3}}$ adalah

- A. $\frac{n}{m}$
B. $\frac{m}{n}$
C. $\frac{n}{mn}$
D. $m\sqrt{n}$
E. $n\sqrt{m}$

3. Diketahui ${}^2\log 7 = a$ dan ${}^2\log 3 = b$. Nilai ${}^6\log 14 = \dots$

A. $\frac{a}{a+b}$

D. $\frac{a}{a(1+b)}$

B. $\frac{a+1}{a+b}$

E. $\frac{a+1}{a(1+b)}$

C. $\frac{a+1}{b+1}$

4. Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2^{2-2x} + 2 > \frac{9}{2^x}$, $x \in \mathbb{R}$ adalah

A. $x < -1$ atau $x > 2$

D. $-2 < x < 1$

B. $x < -2$ atau $x > 1$

E. $-1 < x < 2$

C. $x < 0$ atau $x > 1$

5. $(m+3)x^2 + 2(m-7)x + m - 3 = 0$ akan mempunyai akar-akar positif jika

A. $-3 < m \leq 3$

D. $-7 < m \leq 3$

B. $3 < m \leq$

E. $-4\frac{1}{7} < m \leq -3$

C. $-3 < m \leq 7$

6. Tujuh tahun lalu umur ayah sama dengan enam kali umur Budi. Empat tahun yang akan datang, dua kali umur ayah sama dengan lima kali umur Budi ditambah 9 tahun. Umur ayah sekarang adalah

A. 39 tahun

D. 54 tahun

B. 43 tahun

E. 78 tahun

C. 49 tahun

7. Persamaan lingkaran yang pusatnya terletak pada garis $2x - 4y - 4 = 0$, serta menyinggung sumbu- x negatif dan sumbu- y negatif adalah

A. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 4 = 0$

D. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$

B. $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 8 = 0$

E. $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 4 = 0$

C. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 4 = 0$

8. Diketahui fungsi $f(x) = \frac{1}{2x-1}$ dan $(f \circ g)(x) = \frac{x}{3x-2}$. Fungsi $g(x) =$

A. $\frac{1}{x}$

B. $2 + \frac{1}{x}$

C. $\frac{1}{x} - 2$

D. $2 - \frac{1}{x}$

E. $\frac{1}{x} - 1$

9. Diketahui premis-premis sebagai berikut.

Premis 1 : Jika ia seorang kaya, maka ia berpenghasilan banyak.

Premis 2 : Ia berpenghasilan sedikit.

Kesimpulan yang sah dari premis-premis tersebut adalah

A. Ia seorang kaya.

B. Ia seorang yang tidak kaya.

C. Ia seorang dermawan.

D. Ia tidak berpenghasilan banyak.

E. Ia bukan seorang yang miskin.

10. Fungsi $f(x)$ dibagi $x - 1$ bersisa 3, sedangkan jika dibagi $x - 2$ bersisa

4. Jika $f(x)$ dibagi $x^2 - 3x + 2$, sisanya adalah

A. $2x + 1$

D. $2x - 3$

B. $-x - 2$

E. $x + 1$

C. $x + 2$

11. Ingkaran pernyataan "Jika guru tidak hadir, maka semua siswa bersukaria" adalah ...
- Guru hadir dan semua siswa tidak bersukaria.
 - Guru hadir dan ada beberapa siswa bersukaria.
 - Guru hadir dan semua siswa bersukaria.
 - Guru tidak hadir dan ada beberapa siswa tidak bersukaria.
 - Guru tidak hadir dan semua siswa tidak bersukaria.

12. Suatu perusahaan menghasilkan x produk dengan biaya total sebesar $(9.000 + 1.000x + 10x^2)$ rupiah. Jika semua hasil produk perusahaan tersebut habis dijual dengan harga Rp5.000 untuk satu produknya, keuntungan maksimum yang dapat diperoleh perusahaan tersebut adalah
- Rp149.000
 - Rp249.000
 - Rp391.000
 - Rp609.000
 - Rp757.000

13. Diketahui matriks $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$, dan $C = \begin{pmatrix} -8 & a \\ b & -14 \end{pmatrix}$.

Jika $A + 3B = C$, nilai a dan b berturut-turut adalah

- 2 dan 4
 - 2 dan 4
 - 2 dan 14
 - 8 dan -14
 - 8 dan 14
14. Diketahui $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, dan $|\vec{a} - \vec{b}|$ berturut-turut adalah 4, 6, dan $2\sqrt{19}$. Nilai $|\vec{a} + \vec{b}|$ adalah
- $4\sqrt{19}$
 - $\sqrt{19}$
 - $4\sqrt{7}$
 - $2\sqrt{7}$
 - $\frac{1}{2}\sqrt{7}$

15. Bila panjang proyeksi vektor $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j}$ pada vektor $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dengan $x, y > 0$ adalah 1, nilai $4x - 3y + 1 = \dots$
- A. -1
B. 0
C. 1
D. 2
E. 3
16. Jika $(^a\log(3x - 1))(^5\log a) = 3$, nilai $x = \dots$
- A. 50
B. 48
C. 42
D. 36
E. 35
17. Persamaan bayangan garis $y = 2x - 3$ yang direfleksikan terhadap garis $y = -x$ dan dilanjutkan garis $y = x$ adalah
- A. $2y + x + 3 = 0$
B. $2y + x - 3 = 0$
C. $2y - x - 3 = 0$
D. $y + 2x - 3 = 0$
E. $y - 2x - 3 = 0$
18. Aka-akar persamaan $x^2 - 6x + a - 1 = 0$ adalah p dan q . Agar $p^2 + q^2 = 10$, nilai a harus sama dengan
- A. 8
B. 9
C. 10
D. 12
E. 14
19. Dalam deret geometri diketahui suku ke-2 adalah 10 dan suku ke-5 adalah 1.250. Jumlah n suku pertama deret tersebut adalah
- A. $2(5^n - 1)$
B. $2(4^n)$
C. $\frac{1}{2}(5^n - 1)$
D. $\frac{1}{2}(4^n)$
E. $\frac{1}{4}(5^n - 1)$

20. Suatu keluarga mempunyai 6 anak yang usianya pada saat ini membentuk barisan aritmetika. Jika usia anak ke-3 adalah 7 tahun dan usia anak ke-5 adalah 12 tahun, jumlah usia keenam anak tersebut adalah

- A. 48,5 tahun
 B. 49,0 tahun
 C. 49,5 tahun
 D. 50,0 tahun
 E. 50,5 tahun

21. Suku ke- n suatu barisan geometri adalah U_n . Jika suku pertama, kedua, dan ketiga berturut-turut adalah k , $3k$, dan $8k + 4$, suku kelima barisan tersebut adalah

- A. 81
 B. 162
 C. 324
 D. 648
 E. 864

22. ABCD.EFGH adalah sebuah kubus. Jika θ adalah sudut antara diagonal AG dan rusuk AD, nilai $\cos \theta$ sama dengan

- A. $\frac{1}{2}$
 B. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 C. $\sqrt{2}$
 D. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$
 E. $\sqrt{3}$

23. Diketahui kubus ABCD.EFGH dengan panjang rusuk 8 cm. Jarak titik H dan garis AC adalah

- A. $8\sqrt{3}$ cm
 B. $8\sqrt{2}$ cm
 C. $4\sqrt{6}$ cm
 D. $4\sqrt{3}$ cm
 E. $4\sqrt{2}$ cm

24. Nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x}{\sqrt{1-2x} - \sqrt{1+2x}} \right) = \dots$

- A. 4
 B. 2
 C. 1
 D. 0
 E. -2

25. Jika $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{\sin y}{y} \right) = 1$,
 nilai $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos^2(x-1)}{4(x^2 - 2x + 1)} \right) = \dots$

- A. 0
 B. $\frac{1}{4}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. 1
 E. ∞

26. Titik-titik segitiga sama kaki ABC terletak pada lingkaran berjari-jari 3 cm. Jika alas $AB = 2\sqrt{2}$ cm, nilai $\tan A = \dots$

- A. $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{7})$
 B. $\frac{1}{2}(7 + \sqrt{3})$
 C. $\frac{1}{2}(3\sqrt{2} + \sqrt{14})$
 D. $\frac{1}{2}(2\sqrt{2} + 3\sqrt{7})$
 E. $\frac{1}{2}(\sqrt{6} + \sqrt{14})$

27. Nilai dari $\cos 150^\circ + \sin 45^\circ + \frac{1}{2} \cot (-330^\circ)$ sama dengan

- A. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 B. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
 C. $\sqrt{2}$
 D. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
 E. $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

28. Diketahui $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$ dan $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{4}$ dengan α dan β merupakan sudut lancip.

Nilai $\cos(\alpha - \beta) = \dots$

- A. -1
B. $-\frac{1}{2}$
C. $\frac{1}{2}$
D. $\frac{3}{4}$
E. 1

29. Nilai dari $\int_0^{\frac{1}{6}\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) dx = \dots$

- A. $-\frac{1}{4}$
B. $-\frac{1}{8}$
C. $\frac{1}{8}$
D. $\frac{1}{4}$
E. $\frac{3}{8}$

30. Hasil dari $\int x\sqrt{x} dx = \dots$

- A. $\frac{1}{2}x\sqrt{x} + C$
B. $2\frac{1}{2}x^2\sqrt{x} + C$
C. $2\frac{1}{2}x\sqrt{x} + C$
D. $\frac{2}{5}x\sqrt{x} + C$
E. $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x} + C$

31. Nilai dari $\int_{-1}^3 2x(3x+4)dx = \dots$
- A. 88
B. 84
C. 56
- D. 48
E. 46
32. Himpunan penyelesaian persamaan $\sin^2 2x - 2 \sin x \cos x - 2 = 0$, untuk $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ adalah....
- A. $\{45^\circ, 135^\circ\}$
B. $\{135^\circ, 180^\circ\}$
C. $\{45^\circ, 225^\circ\}$
- D. $\{135^\circ, 225^\circ\}$
E. $\{135^\circ, 315^\circ\}$
33. Diketahui koordinat $A(0, 0, 0)$, $B(-1, 1, 0)$, dan $C(1, -2, 2)$. Jika sudut antara \overrightarrow{AB} dan \overrightarrow{AC} adalah θ , nilai $\cos \theta = \dots$
- A. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$
B. $-\frac{1}{2}$
C. 0
- D. $\frac{1}{2}$
E. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$
34. Luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 4x + 4$, $y = x^2$, garis $x = 0$, dan garis $x = 2$ adalah
- A. $18\frac{2}{3}$ satuan luas
B. $14\frac{2}{3}$ satuan luas
C. $13\frac{1}{3}$ satuan luas
- D. $8\frac{2}{3}$ satuan luas
E. $2\frac{2}{3}$ satuan luas

35. Volume benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + 4$ dan $y = -2x + 4$ diputar 360° mengelilingi sumbu Y adalah

- A. 8π satuan volume
 B. $\frac{13}{2}\pi$ satuan volume
 C. 4π satuan volume
 D. $\frac{8}{3}\pi$ satuan volume
 E. $\frac{5}{4}\pi$ satuan volume

36. Dari angka 2, 4, 6, 8, dan 9 akan dibuat bilangan yang terdiri atas 3 angka berbeda. Banyak bilangan yang dapat disusun dan bernilai kurang dari 500 adalah

- A. 32
 B. 24
 C. 16
 D. 12
 E. 8

37. Pada percobaan pelemparan dua dadu sebanyak 720 kali, frekuensi harapan munculnya mata dadu berjumlah delapan adalah ... kali.

- A. 60
 B. 80
 C. 100
 D. 120
 E. 160

38. Perhatikan data pada tabel frekuensi berikut!

Kelas	Frekuensi
50 – 54	4
55 – 59	8
60 – 64	14
65 – 69	35
70 – 74	26
75 – 79	10
80 – 84	3

Nilai modus dari data pada tabel adalah

- A. 65,0
 B. 66,0
 C. 67,5
 D. 68,0
 E. 68,5

39. Di tanah seluas 10.000 m² akan dibangun rumah tipe A dan tipe B. Untuk membangun rumah tipe A diperlukan luas 100 m² dan rumah tipe B diperlukan 75 m². Jumlah rumah yang dibangun paling banyak 125 unit. Keuntungan rumah tipe A adalah Rp6.000.000 per unit dan rumah tipe B adalah Rp4.000.000 per unit. Keuntungan maksimum yang dapat diperoleh dari penjualan rumah tersebut sebesar
- A. Rp550.000.000 D. Rp800.000.000
B. Rp600.000.000 E. Rp900.000.000
C. Rp700.000.000
40. Kotak A dan B masing-masing berisi 12 buah lampu. Setelah diperiksa ternyata pada kotak A terdapat 2 lampu rusak dan pada kotak B terdapat 1 lampu rusak. Dari setiap kotak diambil 1 lampu secara acak. Peluang terambilnya sebuah lampu rusak adalah
- A. $\frac{2}{144}$ D. $\frac{32}{144}$
B. $\frac{3}{144}$ E. $\frac{48}{144}$
C. $\frac{18}{144}$

KUNCI JAWABAN

BAB 1. EKSPONEN

1	C	13	A	25	D
2	D	14	D	26	C
3	B	15	C	27	C
4	E	16	A	28	B
5	D	17	D	29	C
6	C	18	B	30	C
7	A	19	D	31	C
8	E	20	C	32	B
9	B	21	E	33	B
10	B	22	D	34	E
11	A	23	D	35	A
12	C	24	B		

BAB 2. BENTUK AKAR

1	C	11	E	21	B
2	C	12	E	22	C
3	E	13	D	23	D
4	C	14	C	24	C
5	B	15	B	25	E
6	A	16	A	26	A
7	B	17	E	27	C
8	E	18	B	28	B
9	A	19	D	29	C
10	B	20	B	30	B

BAB 3. LOGARITMA

1	D	15	D	29	D
2	B	16	D	30	D
3	C	17	D	31	E
4	C	18	A	32	D
5	B	19	D	33	D
6	B	20	B	34	D
7	C	21	D	35	B
8	C	22	B	36	E
9	A	23	C	37	C
10	A	24	D	38	B
11	D	25	C	39	C
12	E	26	A	40	E
13	C	27	E		
14	C	28	D		

BAB 4. PERSAMAAN GARIS

1	B	13	C	25	C
2	A	14	B	26	E
3	D	15	D	27	D
4	E	16	E	28	A
5	D	17	E	29	B
6	E	18	D	30	B
7	B	19	B	31	D
8	D	20	C	32	D
9	A	21	E	33	D
10	E	22	C	34	D
11	A	23	D	35	C
12	B	24	B		

BAB 5. PERSAMAAN KUADRAT

1	B	16	A	31	C
2	A	17	D	32	C
3	D	18	B	33	A
4	C	19	B	34	C
5	E	20	B	35	B
6	B	21	E	36	B
7	E	22	D	37	B
8	D	23	C	38	C
9	E	24	B	39	B
10	C	25	A	40	E
11	E	26	D	41	D
12	A	27	D	42	B
13	C	28	C	43	D
14	D	29	A		
15	C	30	B		

BAB 6. FUNGSI KUADRAT

1	E	16	A	31	D
2	A	17	E	32	B
3	E	18	C	33	B
4	A	19	A	34	D
5	D	20	C	35	C
6	D	21	B	36	A
7	C	22	A	37	B
8	B	23	B	38	D
9	A	24	E	39	A
10	D	25	D	40	B
11	A	26	D	41	D
12	C	27	B	42	B
13	B	28	B	43	D
14	A	29	B	44	D
15	D	30	B		

BAB 7. LINGKARAN

1	B	14	E	27	B
2	B	15	A	28	D
3	C	16	A	29	D
4	D	17	A	30	A
5	C	18	A	31	A
6	E	19	C	32	D
7	C	20	D	33	E
8	D	21	D	34	B
9	D	22	C	35	B
10	A	23	E	36	B
11	B	24	E	37	A
12	A	25	E	38	E
13	B	26	B		

BAB 8. SISTEM PERSAMAAN

1	C	16	D	31	E
2	E	17	B	32	D
3	D	18	B	33	B
4	E	19	C	34	E
5	E	20	A	35	D
6	B	21	C	36	D
7	E	22	B	37	E
8	D	23	D	38	E
9	C	24	A	39	B
10	B	25	E	40	D
11	B	26	C	41	E
12	E	27	B	42	C
13	C	28	B	43	B
14	B	29	E	44	C
15	A	30	A	45	B

BAB 9. PERTIDAKSAMAAN

1	A	15	E	29	E
2	B	16	C	30	D
3	B	17	C	31	D
4	C	18	C	32	E
5	C	19	D	33	A
6	C	20	E	34	E
7	A	21	E	35	D
8	C	22	A	36	D
9	B	23	C	37	D
10	A	24	D	38	A
11	D	25	E	39	D
12	D	26	D	40	D
13	D	27	B		
14	C	28	D		

BAB 10. SUKU BANYAK

1	B	15	E	29	C
2	A	16	A	30	B
3	E	17	A	31	C
4	D	18	C	32	B
5	A	19	D	33	D
6	D	20	E	34	A
7	E	21	D	35	C
8	B	22	B	36	D
9	A	23	C	37	D
10	E	24	A	38	C
11	A	25	E	39	E
12	C	26	A	40	D
13	C	27	C		
14	E	28	C		

BAB 11. KOMPOSISI FUNGSI DAN FUNGSI INVERS

1	E	18	E	35	C
2	C	19	C	36	B
3	C	20	C	37	B
4	A	21	A	38	E
5	A	22	B	39	A
6	C	23	B	40	D
7	B	24	B	41	D
8	B	25	C	42	B
9	A	26	A	43	E
10	C	27	A	44	B
11	E	28	C	45	A
12	C	29	C	46	A
13	D	30	A	47	E
14	E	31	C	48	C
15	A	32	C	49	D
16	B	33	A	50	A
17	D	34	C		

BAB 12. PROGRAM LINEAR

1	B	11	B	21	E
2	A	12	D	22	E
3	E	13	C	23	D
4	E	14	C	24	A
5	E	15	A	25	A
6	A	16	D	26	D
7	E	17	A	27	A
8	C	18	A	28	E
9	C	19	E	29	E
10	B	20	D	30	D

BAB 13 Matriks

1	D	15	D	29	B
2	A	16	E	30	D
3	E	17	D	31	E
4	A	18	C	32	B
5	B	19	C	33	A
6	D	20	B	34	E
7	D	21	C	35	C
8	D	22	C	36	C
9	B	23	E	37	B
10	B	24	D	38	B
11	B	25	D	39	A
12	B	26	E	40	A
13	D	27	E		
14	E	28	B		

BAB 14 VEKTOR

1	D	16	E	31	E
2	D	17	D	32	C
3	E	18	A	33	E
4	A	19	A	34	C
5	D	20	B	35	D
6	C	21	B	36	E
7	A	22	E	37	D
8	E	23	B	38	C
9	C	24	C	39	E
10	C	25	E	40	D
11	A	26	B	41	E
12	E	27	B	42	A
13	C	28	E	43	C
14	E	29	D	44	D
15	A	30	C	45	E

BAB 15 TRANSFORMASI GEOMETRI

1	B	15	D	29	E
2	D	16	C	30	B
3	A	17	C	31	A
4	E	18	E	32	B
5	D	19	B	33	E
6	D	20	A	34	B
7	D	21	A	35	D
8	C	22	C	36	E
9	E	23	C	37	E
10	C	24	D	38	C
11	D	25	C	39	A
12	D	26	B	40	E
13	E	27	A		
14	B	28	A		

BAB 16 BARISAN DAN DERET

1	A	11	B	21	A	31	A	41	C	51	A
2	D	12	E	22	B	32	E	42	B	52	C
3	B	13	A	23	C	33	E	43	B	53	E
4	C	14	A	24	E	34	E	44	E	54	C
5	A	15	C	25	B	35	C	45	C	55	E
6	D	16	B	26	D	36	D	46	C		
7	B	17	D	27	B	37	E	47	E		
8	B	18	B	28	C	38	C	48	A		
9	D	19	A	29	D	39	C	49	D		
10	A	20	D	30	B	40	C	50	D		

BAB 17 BANGUN RUANG

1	E	15	C	29	E
2	B	16	D	30	E
3	B	17	E	31	C
4	C	18	C	32	C
5	C	19	C	33	E
6	B	20	D	34	B
7	A	21	B	35	B
8	B	22	B	36	B
9	B	23	E	37	D
10	B	24	C	38	B
11	C	25	B	39	C
12	D	26	C	40	E
13	B	27	E		
14	B	28	B		

BAB 18 TRIGONOMETRI

1	D	11	E	21	A	31	B	41	D	51	A
2	E	12	E	22	C	32	A	42	B	52	D
3	D	13	C	23	E	33	E	43	C	53	B
4	A	14	E	24	B	34	E	44	C	54	B
5	D	15	C	25	A	35	E	45	B	55	D
6	E	16	C	26	A	36	C	46	D	56	D
7	E	17	C	27	E	37	E	47	B	57	E
8	B	18	C	28	D	38	A	48	B	58	E
9	D	19	C	29	C	39	A	49	C	59	D
10	E	20	B	30	C	40	C	50	A	60	E

BAB 19 LIMIT FUNGSI

1	B	11	C	21	D	31	B	41	D
2	C	12	B	22	B	32	A	42	A
3	D	13	E	23	A	33	A	43	B
4	D	14	A	24	E	34	C	44	A
5	D	15	A	25	C	35	E	45	E
6	E	16	C	26	A	36	A	46	B
7	C	17	E	27	E	37	E	47	B
8	B	18	E	28	D	38	C	48	D
9	D	19	B	29	E	39	D	49	B
10	B	20	E	30	D	40	D	50	D

BAB 20 TURUNAN FUNGSI

1	D	11	B	21	D	31	D	41	D
2	C	12	C	22	C	32	A	42	C
3	B	13	A	23	E	33	E	43	C
4	A	14	B	24	D	34	C	44	B
5	E	15	D	25	B	35	D	45	B
6	B	16	C	26	E	36	B	46	C
7	B	17	D	27	A	37	B	47	A
8	B	18	B	28	C	38	E	48	B
9	E	19	C	29	E	39	B	49	C
10	E	20	C	30	E	40	E	50	B

BAB 21 INTEGRAL

1	A	11	C	21	A	31	B	41	C
2	A	12	C	22	A	32	B	42	C
3	C	13	A	23	D	33	D	43	C
4	B	14	A	24	A	34	E	44	E
5	B	15	E	25	C	35	D	45	D
6	D	16	B	26	D	36	E	46	B
7	A	17	C	27	C	37	B	47	B
8	A	18	A	28	B	38	C	48	D
9	B	19	D	29	D	39	D	49	B
10	B	20	A	30	B	40	B		

BAB 22 STATISTIKA

1	C	15	E	29	B
2	C	16	B	30	D
3	A	17	C	31	B
4	C	18	E	32	D
5	C	19	A	33	C
6	A	20	D	34	A
7	C	21	B	35	C
8	C	22	B	36	E
9	C	23	E	37	B
10	C	24	C	38	B
11	C	25	D	39	E
12	B	26	E	40	C
13	A	27	A		
14	E	28	B		

BAB 23 INTI ATOM DAN RADIOAKTIVITAS

1	C	11	E	21	C	31	A	41	A
2	D	12	B	22	B	32	C	42	E
3	D	13	A	23	A	33	D	43	E
4	D	14	E	24	E	34	A	44	A
5	D	15	B	25	D	35	E	45	C
6	A	16	C	26	B	36	A	46	A
7	B	17	E	27	E	37	E	47	B
8	B	18	B	28	B	38	A	48	D
9	D	19	B	29	D	39	E	49	C
10	B	20	C	30	E	40	A	50	E

BAB 24 RELATIVITAS

1	D	11	C	21	E
2	E	12	E	22	D
3	E	13	E	23	D
4	D	14	D	24	A
5	C	15	A	25	A
6	B	16	B	26	B
7	A	17	C	27	E
8	B	18	A	28	C
9	B	19	A	29	E
10	A	20	B	30	E

KUNCI JAWABAN SOAL EVALUASI

TRY OUT 1			
1	B	21	C
2	B	22	D
3	C	23	C
4	A	24	E
5	B	25	B
6	B	26	C
7	A	27	A
8	D	28	E
9	B	29	C
10	C	30	E
11	D	31	A
12	C	32	E
13	A	33	A
14	D	34	C
15	C	35	D
16	C	36	B
17	E	37	C
18	E	38	D
19	C	39	B
20	C	40	D

DAFTAR PUSTAKA

- Alders, C. J. 1974. *Ilmu Ukur Segitiga*. Jakarta: Pradya Paramita.
- Cheong, CS Toh Thomas. 2002. *Study Guide for Your A–Level Mathematics Edition 2.0.1*. Singapore: Step by Step Publikations.
- Depertemen Pendidikan Nasional. 2003. *Kurikulum 2004 Standar Kompetensi*. Jakarta: Depdiknas.
- James, Stewart. 1998. *Kalkulus, edisi empat, jilid 1*. Jakarta: Erlangga.
- Muis, Abdul, ST. 2002. *Perang Siasat Matematika Praktis*. Yogyakarta: Kreasi Wacana
- Negoro, S.T. dan B. Harahap. 1985. *Ensiklopedia Matematika*. Jakarta: Ghalia Indonesia.
- Rawuh, R. 1976. *Ilmu Ukur Ruang I*. Bandung: Teratai.
- Suah, Sembiring. 2002. *Olimpiade Matematika*. Bandung: Yrama Widya.
- Depertemen Pendidikan Nasional. *Kumpulan Soal Ebtanas, UAN, dan UN Tahun 1985–2014*.
- Depertemen Pendidikan Nasional. *Naskah Ujian Masuk Perguruan Tinggi Negeri Tahun 1987–2014*.

TENTANG PENULIS

Tim BBM

Tim BBM adalah tim yang memfokuskan diri pada riset dan pengembangan materi pada setiap institusi pendidikan mulai dari jenjang SD, SMP, hingga SMA. Tim BBM beranggotakan guru-guru dan tutor-tutor yang memiliki kompetensi sesuai bidang masing-masing dan telah berpengalaman bertahun-tahun di dunia pendidikan. Tim BBM telah menggeluti dunia penulisan sejak beberapa tahun terakhir dan telah mempublikasikan buku-buku penunjang pelajaran di beberapa penerbit ternama yang menjadi best seller di toko-toko buku seluruh Indonesia.

APPS TRY OUT SBMPTN

Untuk download apps try out SBMPTN penerbit cmedia, Anda dapat melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Buka Google Play search "Tryout SBMPTN" atau "Penerbit Cmedia"
2. Klik Tryout SBMPTN dari Penerbit Cmedia.
3. Klik Install.



APPS TOEFL CMEDIA

Untuk download apps toefl Cmedia, Anda dapat melakukan langkah-langkah sebagai berikut.

1. Buka Google Play search "TOEFL CMEDIA" atau "Penerbit Cmedia".
2. Klik link "<https://play.google.com/store/search?q=toefl%20cmedia&c=apps>".
3. Klik TOEFL CMEDIA dari Penerbit Cmedia.
4. Klik Install.



GEBYAR BEASISWA PENERBIT CMEDIA

Demi mewujudkan kepedulian dan keikutsertaan dalam membangun bangsa melalui bidang pendidikan, Penerbit Cmedia mempersembahkan **GEBYAR BEASISWA PENERBIT CMEDIA**. Penerbit Cmedia akan menyalurkan beasiswa dengan total nilai **100 juta rupiah** kepada siswa-siswi pilihan yang telah membeli buku-buku bertanda khusus yang diterbitkan oleh Penerbit Cmedia.

Adapun persyaratan yang harus dipenuhi siswa-siswi dalam mengajukan beasiswa sebagai berikut:

1. Struk/kuitansi pembelian buku ini.
2. Fotokopi nilai rapor semester terakhir.
3. Mengisi formulir asli yang terdapat di dalam buku ini.
4. Tulis "GBPC" di pojok kanan atas amplop.
5. **Like fans page PenerbitCmedia** dan **add facebook Penerbit Cmedia** sebagai teman.
6. **Follow twitter @penerbitcmedia.**

Dokumen persyaratan dikirim via pos ke alamat:
Redaksi Penerbit Cmedia
Jalan H. Montong No. 57 Ciganjur, Jagakarsa
Jakarta Selatan 12630

Periode 1

Untuk pengiriman sampai 15 Mei 2015, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Juni 2015.

Periode 2

Untuk pengiriman sampai 15 November 2015, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Desember 2015.

Periode 3

Untuk pengiriman sampai 15 Mei 2016, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Juni 2016.

Periode 4

Untuk pengiriman sampai 15 November 2016, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Desember 2016.

Periode 5

Untuk pengiriman sampai 15 Mei 2017, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Juni 2017.

Periode 6

Untuk pengiriman sampai 15 November 2017, pengumuman beasiswa akan diumumkan tanggal 15 Desember 2017.

Daftar penerima beasiswa akan diumumkan melalui website:
www.penerbitcmedia.com

Keputusan tim seleksi dari Penerbit Cmedia mengenai beasiswa tersebut bersifat mutlak dan tidak dapat diganggu gugat.

Dokumen persyaratan dikirim via pos ke alamat:
Redaksi Penerbit Cmedia
Jalan H. Montong No. 57 Ciganjur, Jagakarsa
Jakarta Selatan 12630

FORMULIR PENGAJUAN BEASISWA GEBYAR BEASISWA PENERBIT C MEDIA

Nama Lengkap :
Tempat, Tanggal Lahir :
Jenis Kelamin :
Alamat Rumah :

Nomor Telepon :
Email :

Alamat Sosial Media
Facebook :
Twitter :
Google + :

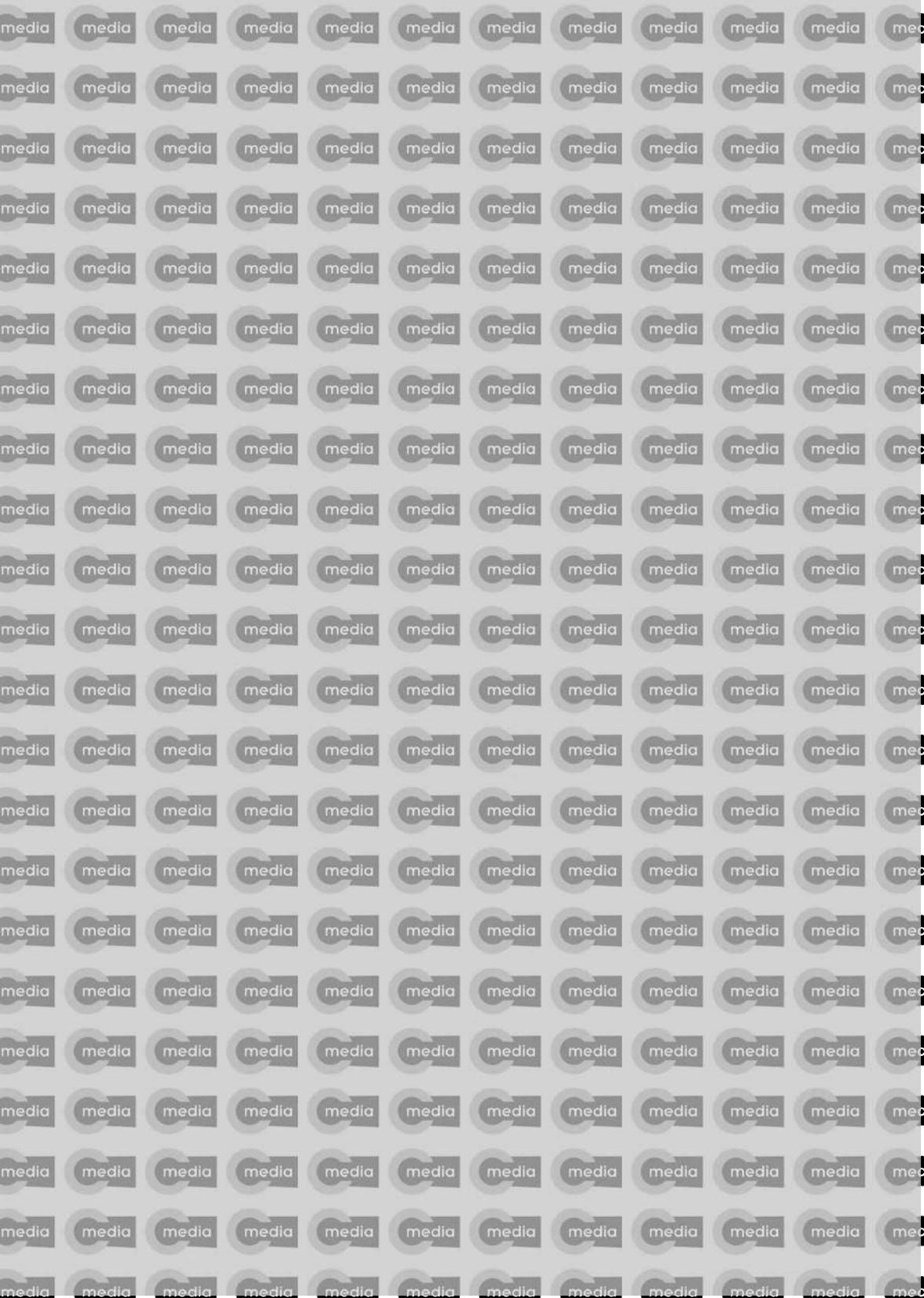
Nama Sekolah :
Alamat Sekolah :

Nomor Telepon Sekolah :
Nomor Induk Siswa :
Kelas :
Pelajaran yang Disukai :
Hobi :
Buku Pelajaran Favorit :
Cita-cita :

Formulir pengajuan beasiswa ini diisi dengan sebenar-benarnya.
Yang mengajukan beasiswa,

(.....)





BIG BOOK

MATEMATIKA SMA KELAS 1, 2, & 3

Big Book Matematika SMA Kelas 1, 2, & 3 hadir sebagai solusi bagi siswa SMA dan MA yang ingin memahami matematika secara menyeluruh dan mendalam. Siswa akan mendapatkan:

- **Kumpulan Ringkasan Materi Lengkap**, disusun secara padat dan jelas dari materi yang diajarkan di kelas 1, 2, & 3 untuk memudahkan siswa dalam mempelajari materi yang ada.
- **RATUSAN Soal dan Pembahasan**, dibahas dengan *Solusi Smart* yang mudah dipahami untuk memberikan gambaran bagi siswa tentang soal-soal yang diberikan dalam setiap bab.
- **RATUSAN Soal Latihan**, dibuat berdasarkan soal-soal yang sering muncul sebelumnya untuk melatih siswa dalam pemahaman materi yang telah diberikan dalam setiap bab.
- **Paket Soal Evaluasi**, merupakan kumpulan soal-soal dari setiap bab yang dikumpulkan di bagian akhir buku sebagai evaluasi akhir pemahaman materi siswa.

Dengan keunggulan-keunggulan tersebut, mendapatkan nilai 9 atau bahkan 10 dalam Ulangan Harian, Ujian Tengah dan Akhir Semester, Ujian Sekolah, hingga Ujian Nasional bukanlah perkara yang susah. Salam sukses!

media

ISBN (13) 978-602-1609-77-4

ISBN 602-1609-77-8



9 786021 609774

Pelajaran



|Penerbit Cmedia



|@penerbitcmedia



|+PenerbitCmedia



|redaksi@penerbitcmedia.com